Гарчиг

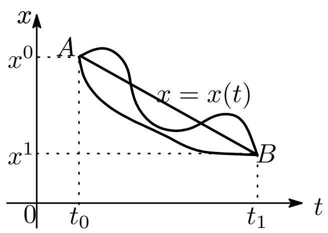
Бүлэг 1

Вариац тоолол

1.1 Вариац тооллын бодлогын тавил

Вариац тооллын бодлогод хүргэдэг дараах жишээнүүд авч үзье.

Жишээ 1. XOT координатын хавтгайд $A(x^0, t_0)$, $B(x^1, t_1)$ цэгүүд өгөгджээ. A, B цэгүүдийг холбосон гөлгөр (дифференциалчлагддаг) муруйнууд $x = x(t)$ дотроос хамгийн богино урттай муруйг ол.



$x = x(t)$ дурын муруйн нумын дифференциалыг бичвэл:

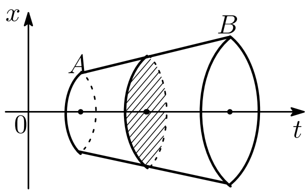
$$ds = \sqrt{1 + x'^2}dt$$

$[t_0, t_1]$ завсар дээрх нумын уртыг олбол

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + x'^2(t)}dt.$$

Өөрөөр хэлбэл $J(x)$ функционалд хамгийн бага утга олгодог $x = x(t)$ муруйг олох бодлого болж байна.

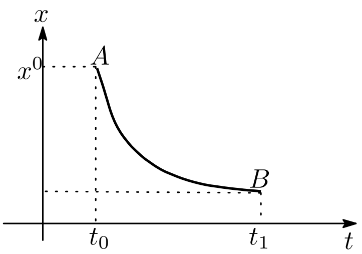
Жишээ 2. 1-р мөчид орших A, B цэгүүдийг дайрч муруй шугам гарах бөгөөд Ot тэнхлэгийг огтлохгүй. Энэ муруй шугамыг Ot тэнхлэгийг тойруулж эргүүлье. Эргэлтийн биеийн гадаргуугийн талбайг хамгин бага байлгах муруйг олъё.



Эргэлтээр үүсэх биеийн гадаргуугийн талбайг олдог томьёог бичвэл:

$$J(x) = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} x(t)\sqrt{1+x'^2}dt.$$

Жишээ 3. Брахистохроны тухай бодлого.(хамгийн хурдан шилжилтийн муруй) Энэ бодлогыг анх удаа 1696 онд И.Бернулли томъёолжээ. Энэ бодлогоос вариац тоолол эхлэлээ авдаг гэж үздэг. Бодлогын тавилыг авч үзье.



XOT хавтгайн (x^0, t_0) цэг дээр m масстай материаллаг цэг байрлажээ. Энэ цэгээс хүндийн хүчний нөлөөгөөр материаллаг цэг гөлгөр муруйн дагуу B цэгт шилжиж ирнэ.

Тэгвэл энэ шилжилт хамгийн богино хугацаанд явагдах муруйн хэлбэрийг олъё. Муруйн хэлбэрийг $x = x(t)$ гэе. (x, t) цэгийг τ эгшинд авч үзье. Үрэлтийн ба эсэргүүцлийн хүчийг үл тооцож хөдөлгөөний тэгшитгэлийг зохиоё. $h = x^0 - x$, v хурд, mgh потенциал энерги. Энерги хадгалагдах хуулийг бичвэл:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(x^0 - x)}.$$

Нөгөө талаар хурдыг олбол: $v = \dfrac{ds}{d\tau}$.

Нумын дифференциал ds-г тодорхойлъё.

$$ds = \sqrt{1 + x'^2}dt.$$

Материаллаг цэгийн ds нумын дагуу шилжих хугацааг олбол:

$$d\tau = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + x'^2}dt}{\sqrt{2g(x^0 - x)}}.$$

Тэгвэл AB нумын дагуу шилжих нийт хугацааг олбол:

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{(1 + x'^2)}{2g(x^0 - x)}}dt$$

Одоо вариац тооллын бодлогыг ерөнхийд нь тавибал:
$T = [t_0, t_1]$ хэрчим дээр тасралтгүй дифференциалчлагддаг $x = x(t)$ функцүүд тодорхойлогдсон бөгөөд хэрчмийн захын цэгүүд дээр өгөгдсөн утгууд авна. Өөрөөр хэлбэл $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$ байна. $F = F(x, y, z)$ функц нь хувьсагчуудаараа тасралтгүй бөгөөд 2 дахин тасралтгүй дифференциалчлагдана. Функционал тодорхойлъё.

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)dt. \tag{1.1}$$

(1.1) функционал хамгийн бага утгаа авдаг $x^* = x^*(t)$ функцийг олъё. Боломжит муруйнуудын олонлогийг D-ээр тэмдэглэе.

$$D = \{x(t) \in C^1(T) | \;\; x(t_0) = x^0, \;\; x(t_1) = x^1\}$$

Тэгвэл вариац тооллын бодлогыг дараах хэлбэрт бичнэ.

$$J(x) \to \min, \quad x \in D \subset C^1(T) \tag{1.2}$$

$x^* = x^*(t)$ боломжит муруй болог.

Тодорхойлолт 1. Хэрэв эерэг тоо ε орших бөгөөд

$$|x(t) - x^*(t)| \leq \varepsilon, \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{1.3}$$

нөхцөлийг хангасан бүх боломжит муруйнуудын хувьд

$$J(x) \geq J(x^*) \tag{1.4}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал $x^* = x^*(t)$ муруйг $J(x)$ функционалын орчны хүчтэй минимумын цэг гэж нэрлэнэ. Хэрэв (1.4) нөхцөл нь

$$\left.\begin{array}{l} |x(t) - x^*(t)| \leq \varepsilon \\ |x'(t) - x^{*\prime}(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1] \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

нөхцлийг хангасан бүх $x(t)$-ийн хувьд биелэгдэж байвал $x^* = x^*(t)$ -г орчны сул минимумын цэг гэж нэрлэнэ.
Хэрэв x^* орчны хүчтэй минимумын цэг бол мөн орчны сул минимумын цэг болох нь тодорхойлолтоос илэрхий юм. Харин урвуу нь биелэх албагүй. Иймд сул минимумын зайлшгүй нөхцөл нь хүчтэй минимумын зайлшгүй нөхцөл болно.

Жишээ 4. $\quad J(x) = \int\limits_0^1 x^2(1 - x'^2)dt \to \min,$

$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 0$$

Энэ бодлогын хувьд $x^* = x^*(t) = 0, \; t \in [0,1]$ нь орчны сул минимумын цэг гэдгийг харуулъя. Эерэг тоо ε-г $(0,1)$ завсраас авъя. (1.5) нөхцлийг хангасан дурын боломжит $x(t)$ муруй авъя.

$$|x(t)| \leq \varepsilon, \quad |x'(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1], \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

нөгөө талаар $J(x^*) = 0$ тул

$$J(x) - J(x^*) = \int_0^1 x^2(1 - x'^2(t))dt \geq 0.$$

Иймд $x^*(t)$ орчны сул минимумын цэг болно. Одоо $x^*(t)$-г орчны хүчтэй минимумын цэг болохгүй гэдгийг харуулъя. Үүний тулд $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin 2\pi nt, \quad n = 1, 2, \ldots$ гэсэн боломжит муруйнуудын дараалллыг сонирхъё.

$$|x_n(t) - x^*(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sin 2\pi nt \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \xrightarrow[\cdot]{n \to \infty} 0$$

$x^*(t)$-цэгийн орчинд $x_n(t)$ функцүүд харъяалагдаж байна. Эдгээр дараалал дээрх функционалын утгыг бодвол:

$$J(x_n) = \int_0^1 \frac{\sin^2 2\pi nt}{n}(1 - 4\pi^2 n \cos^2 2\pi nt)dt =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{1 - \cos 4\pi nt}{n} - \frac{\pi^2}{2}(1 - \cos 8\pi nt) \right] dt = \frac{1}{2n} - \frac{\pi^2}{2} < 0 = J(x^*)$$

Санамж. $x_n(t)$ ба x^* функцуудын уламжлалууд нь эрс ялгаатай байна. Үүнийг шалгавал:

$$|x_n' - x^{*\prime}| = \left| \frac{2}{\sqrt{n}} n \cdot \cos 2\pi nt - 0 \right| = 2n|\cos 2\pi nt| \to \infty, \ \ n \to \infty \text{ үед}$$

1.2 Вариацын арга

Орчны сул минимумын цэгийн оновчтой нөхцлийг гаргахад энэ аргыг ашигладаг. $\eta = \eta(t)$ функцийг тодорхойлъё.

$$\eta(t) \in C^1(T), \qquad \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0 \tag{1.6}$$

Боломжит муруйн вариацыг авч үзье. $\delta x(t) = \varepsilon\eta(t)$, ε дурын тоо бөгөөд t-ээс хамаарахгүй. Хэрэв $x(t) \in D$ бол $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t) \in D$.

Функционалын вариац

$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)dt$ функционалын өөрчлөлтийг сонирхъё. Үүнд $x = x(t)$, $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$ болно.

$$\Delta J(x) = J(\tilde{x}) - J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [F(\tilde{x}, \tilde{x}', t) - F(x, x', t)]dt.$$

$x = x(t)$ ба $\eta = \eta(t)$-ийн тодорхой утгуудад $\Delta J(x)$ нь ε-ээс хамаарсан функц байна. $F(x, x', t)$ функцийг Тейлорын цуваагаар задалбал:

$$F(\tilde{x}, \tilde{x}', t) - F(x, x', t) = \varepsilon\frac{\partial F(x, x', t)}{\partial x}\eta(t) + \varepsilon\frac{\partial F(x, x', t)}{\partial x'}\eta'(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\varepsilon^2\frac{\partial^2 F(x, x', t)}{\partial x^2}\eta^2(t) + 2\varepsilon^2\frac{\partial^2 F(x, x', t)}{\partial x \partial x'}\eta(t)\eta'(t) +$$

$$+\varepsilon^2\frac{\partial^2 F(x, x', t)}{\partial x'^2}\eta'^2(t)\Big] + 0(\varepsilon^2).$$

Функционалын өөрчлөлтийг дараах хэлбэрт тавъя.

$$\Delta J(x) = \varepsilon\delta J(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2(x) + 0(\varepsilon^2), \quad \frac{0(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \to 0, \ \varepsilon \to 0 \quad (1.7)$$

δJ-г функционалын 1-р вариац гэж нэрлэнэ. $\delta^2 J$-г функционалын 2-р вариац гэж нэрлэнэ.

$$\delta J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(x, x', t)}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial F(x, x', t)}{\partial x'}\eta'(t)\right] dt \qquad (1.8)$$

$$\delta^2 J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \eta^2(t) + \frac{2\partial^2 F(x,x',t)}{\partial x \partial x'} \eta(t)\eta'(t) + \frac{\partial^2 F(x,x',t)}{\partial x'^2} \eta'^2(t) \right] dt \tag{1.9}$$

Теорем 1. *$x^* = x^*(t) \in D$ нь $J(x)$ функционалын орчны сул минимумын цэг болог. Тэгвэл (1.6) нөхцлийг хангадаг бүх $\eta(t)$ функцуудын хувьд*

$$\delta J(x^*) = 0 \tag{1.10}$$

$$\delta^2 J(x^*) \geq 0 \tag{1.11}$$

нөхцлүүд биелэгдэнэ.

Баталгаа. Эсрэгээс нь баталъя. $\delta J(x^*) = \alpha \neq 0$ гэе. Тэгвэл (1.7)-аас

$$\Delta J(x^*) = \varepsilon \left[\delta J(x^*) + \frac{\varepsilon}{2}\delta^2 J(x) + \frac{0(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \right] =$$

$$= \varepsilon \left[\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\delta^2 J(x^*) + \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \right].$$

ε-ийн тэмдгийг сонгохдоо α-ийн тэмдгийн эсрэгээр авъя. ε-ийг хүрэлцээтэй бага байхаар авбал $\Delta J(x^*) < 0$ болох ба $\tilde{x}(t) = x^* + \varepsilon\eta(t)$, $x^*(t)$ функцууд ба тэдгээрийн уламжлалууд хоорондоо бага ялгагдана. Өөрөөр хэлбэл,

$$|\tilde{x}(t) - x^*(t)| = |\varepsilon||\eta(t)| \leq |\varepsilon| \max_{t\in[t_0,t_1]} |\eta(t)|,$$

$$|\tilde{x}'(t) - x^{*\prime}(t)| = |\varepsilon||\eta'(t)| \leq |\varepsilon| \max_{t\in[t_0,t_1]} |\eta'(t)|.$$

$\eta(t)$, $\eta'(t)$ функцууд $[t_0, t_1]$ дээр тасралтгүй учир зааглагдсан байна. Нөгөө талаар $\Delta J(x^*) < 0$ тул x^* нь орчны сул минимумын цэг гэдэгт харшилж байна. Одоо (1.10) нөхцөл биелэгдээд (1.11) биелэгдээгүй гэж үзье. $\delta^2 J(x^*) < 0$ бологю. Тэгвэл

$$\Delta^2 J(x^*) = \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 J(x^*) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon^2\left[\frac{1}{2}\delta^2 J(x^*) + \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right].$$

ε-ийн хүрэлцээтэй бага үед $\Delta J(x^*)$-ийн тэмдэг нь $\delta^2 J(x^*)$-ийн тэмдэгтэй адилхан байна. Тэгвэл $\Delta J(x^*) < 0$ болж дахин зөрчилд хүрэв. Иймд теорем батлагдав. ■

$\delta J(x^*)$, $\delta^2 J(x^*)$ илэрхийлэлд (1.6) нөхцөлийг хангасан дурын $\eta(t)$ функцууд оролцсон учраас (1.10), (1.11) нөхцлийг шалгахад нилээн түвэгтэй гэдэг нь харагдаж байна. Иймд (1.10) илэрхийллийг хялбарчилъя. Үүний тулд туслах чанарын дараах үр дүн ашиглана.

Лагранжийн Лемм. *Хэрэв*

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\eta(t)dt = 0 \tag{1.12}$$

тэнцэтгэл нь $T = [t_0, t_1]$ завсарт тодорхойлогдсон бүх тасралтгүй функцууд $a(t)$ болон (1.6) нөхцлийг хангадаг $\eta(t)$ функцуудын хувьд биелэгддэг бол $a(t) \equiv 0, \;\; t \in [t_0, t_1]$ болно.
Баталгаа. Эсрэгээс баталъя. Тэгвэл $\tau \in (t_0, t_1)$ цэг орших бөгөөд $a(\tau) > 0$ нөхцөл биелэгдэнэ. $a(t)$ тасралтгүй учир $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ орших ба

$$a(t) > \alpha, \quad t \in [\tau - \varepsilon, \quad \tau + \varepsilon] \subset [t_0, t_1].$$

$\eta(t)$ функц байгуулъя.

$$\eta(t) = \begin{cases} (t-\tau+\varepsilon)^2(t-\tau-\varepsilon)^2, & t \in [\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon] \\ 0, & t \in [\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon] \end{cases}$$

Энэ функцийн хувьд (1.12) мөн л хүчинтэй байна.

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\eta(t)dt > \alpha \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} (t-\tau+\varepsilon)^2(t-\tau-\varepsilon)^2 dt =:$$

$$\left\{\begin{array}{l} t-\tau = y \\ t-\tau=\tau-\varepsilon \\ y_1 = \tau-\varepsilon-\tau=-\varepsilon \\ y_2=\tau+\varepsilon-\tau=\varepsilon \end{array}\right\} := \alpha \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (y+\varepsilon)^2(y-\varepsilon)^2 dy > 0$$

болж зөрчилд оров. Иймд $a(t) \equiv 0, \ \ t \in (t_0, t_1)$ болох ба $a(t)$ тасралтгүй учраас $\lim\limits_{\tau\to t_0} a(\tau) = 0, \quad \lim\limits_{\tau\to t_1} a(\tau)=0.$

Теорем 2. *Хэрэв $x = x(t)$ нь $J(x)$ функционалын орчны сул минимумын цэг бол энэ нь дараах Эйлер-Лагранжийн дифференциал тэгшитгэлийг хангана.*

$$\frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x'}\Big) = 0 \qquad (1.13)$$

Баталгаа. $x = x(t)$ орчны сул минимумын цэг учраас $\delta J(x) = 0$ биелэгдэнэ.

$$\delta J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x'}\eta'(t)\right] dt.$$

Нөгөө талаар ($\int udv = vu - \int vdu$) хэсэгчилэн интегралчлах аргыг ашиглавал:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial x'}\eta'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x} d\eta(t) = \frac{\partial F}{\partial x'}\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_1} -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)\eta(t)dt \qquad \text{ба} \ \ \eta(t_0)=\eta(t_1)=0$$

тул $\delta J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)\right] \eta(t)dt = 0.$
Үүнд $F = F(x, x', t)$.
Иймд өмнөх Лемм ёсоор $\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F^*}{\partial x'}\Big) = 0$ болж батлагдав.■

Хэрэв (1.13)-г задалж бичвэл:

$$\frac{\partial^2 F(x,x',t)}{\partial x'^2} x''(t) + \frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x' \partial x} x'(t) + \frac{\partial^2 F(x,x',t)}{\partial x' \partial t} - \frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x} = 0$$

гэсэн 2-р эрэмбийн шугаман биш дифференциал тэгшитгэл гарна. Энэ тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь хоёр тогтмол агуулах бөгөөд түүнийг $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$ нөхцөлүүдээс тодорхойлно. (1.13) тэгшитгэлийг хангадаг шийд бүрийг экстремаль гэж нэрлэнэ. Бодлогын тавилд $\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x'}\Big)$ илэрхийлэл нь $x''(t)$-ыг агуулсан бөгөөд $x(t)$ -ийн функцийн 2-р эрэмбийн уламжлал орших байх тухай огт дурдаагүй билээ. Гэвч Гильберт $\frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x'^2} \neq 0$ нөхцөл биелэгдэж байгаа үед экстремалийн хувьд $x''(t)$ үргэлж оршдог ба тасралтгүй гэдгийг харуулжээ.

Одоо Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийг шинжилье.
Хэрэв $\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = 0$ бол $F(x, x', t)$ функц нь x-ийн хувьд шугаман байна. Өөрөөр хэлбэл $F(x,x',t) = A(x,t) + B(x,t)x'$. Үүнийг Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлд орлуулбал:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} x', \qquad \frac{\partial F}{\partial x'} = B(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial t} = \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} x' + \frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F(x,x',t)}{\partial x'} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x'} x' - \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} x' - \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \tag{1.14}$$

Энэ илэрхийлэл нь эсвэл адилтгал байна, эсвэл тэгшитгэл байна. 2 дахь тохиолдолд (1.14) тэгшитгэлийн шийд $P(x,t) = 0$ болох ба хэрэв энэ муруй нь өгөгдсөн 2 цэгийг дайрч гарч байвал экстремаль болно. Хэрэв (1.14) адилтгал байсан бол $A = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $B = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, үүнд $u = u(x,t)$ тасралтгүй тухайн уламжлалуудтай функц юм. Энэ үед $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$ болно. $F(x,x',t)$ функционалийн хэлбэр нь $F(x,x',t) = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}x'$.

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}x'\Big)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\Big) =$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} d(u(x,t)) = u(x,t)\Big|_{t_0}^{t_1} = u(x^1,t_1) - u(x^0,t_0).$$

Энэ тохиолдолд интеграл нь интегралчлах замаас огт хамаарахгүй ба өгөгдсөн цэгүүдийн байрлалаас хамаарч байна. Функциональ нь замаас хамарахгүй тогтмол утга авч байна. Энэ үед Вариацын бодлого утгаа алдаж байна. Иймд цаашид бид $\dfrac{\partial^2 F(x,x',t)}{\partial x'^2} \neq 0$ гэж үзэх болно. Одоо дараах тохиолдлуудыг авч үзье.

a) $F(x,x',t) = F(x')$
$\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\Big) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'^2}x''$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$.
Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийг бичвэл:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big) = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}x'' = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}x'' = 0.$$

Эндээс $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \neq 0$ тул $x'' = 0$ ба $x = C_1 t + C_2$ шулуун болж байна.

в) $F(x,x',t)=F(x',t)$. Энэ тохиолдолд $\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$ тул

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)=\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}x''+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial t}\ \text{ба}\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)=0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x'}=const.$$

Энэ нь x' ба t-ээс хамаарсан 1-р эрэмбийн дифференциал тэгшитгэл болно.

с) $F(x,x',t){=}F(x,x')$, $\quad F(x,x',t)-x'\dfrac{\partial F(x,x',t)}{\partial x'}{=}F-x'\dfrac{\partial F}{\partial x'}$ тэнцэтгэлийн 2 талыг t-ээр дифференциалчилъя.

$$\frac{d}{dt}\Big[F-x'\frac{\partial F}{\partial x'}\Big]=\frac{\partial F}{\partial x'}x'+x''\frac{\partial F}{\partial x'}-x''\frac{\partial F}{\partial x'}-x'\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)=$$

$$=x'\Big[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)\Big]=0.$$

Иймд экстремалийн хувьд $F-x'\dfrac{\partial F}{\partial x'}=const$ биелэгдэнэ. Энэ нь x', x-ээс хамаарсан 1-р эрэмбийн дифференциал тэгшитгэл болно. Үүнийг ашиглан 2-р жишээний бодолтыг гүйцэтгэвэл:

$$J(x)=2\pi\int_{t_0}^{t_1}x\sqrt{1+x'^2}dt$$

тул $x\sqrt{1+x'^2}-\dfrac{x\cdot x'^2}{\sqrt{1+x'^2}}=C_1$. Эндээс $x(1+x'^2)-x\cdot x'^2=C_1\sqrt{1+x'^2}$, $x=C_1\sqrt{1+x'^2}$ болох ба

$$x^2=C_1^2(1+x'^2),\quad C_1^2x'^2=x^2-C_1^2$$

Эндээс

$$x'=\sqrt{\frac{x^2-C_1^2}{C_1^2}}=\frac{1}{C_1}\sqrt{x^2-C_1^2}.$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{x^2-C_1^2}}{C_1}\Rightarrow\frac{C_1dx}{\sqrt{x^2-C_1^2}}=dt\Rightarrow$$

$$C_1 \ln\left(x+\sqrt{x^2-\tfrac{2}{1}}\right)=t+C_2$$

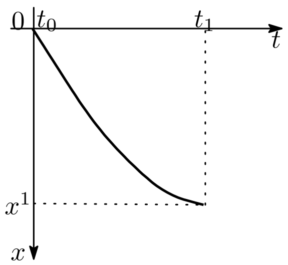
Эндээс захын нөхцлийг ашиглан $C_1,\ C_2$-г олно.

Жишээ 5. Дараах функционалын экстремалийг ол.

$$J(x)=\int_0^1 (12xt+xx'+x'^2)dt, \qquad \begin{cases} x(0)=1 \\ x(1)=4 \end{cases}$$

Лагранжийн тэгшитгэл зохиоё.
$12t+x'-x'-2x''=0,\ x''=6t,\ x'(t)=3t^2+C_1,\quad x(t)=t^3+C_1t+C_2$. Захын нөхцөлөөс C_1 ба C_2-г олбол $C_1=2,\ \ C_2=1$. Иймд экстремаль нь $x=x(t)=t^3+2t+1$ болно.

Одоо 3-р жишээ буюу хамгийн хурдан шилжилтийн муруйг олох бодлогыг бодъё.



$$F(x,x',t)=\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2gx}},\ x(t_0)=0,$$

$$x(t_1)=x^1,\quad F-x'\frac{\partial F}{\partial x'}=const,$$

$$\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2gx}}-x'\frac{1}{\sqrt{2gx}}\cdot\frac{2x'}{\sqrt{1+x'^2}}=C$$

$$\frac{1+x'^2-x'^2}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+x'^2}}=C$$

$$2gx(1+x'^2)=\frac{1}{C^2}\Rightarrow x=\frac{k}{1+x'^2}.$$

Иймд Лагранжийн тэгшитгэлийн шийд:

$$\begin{cases} t=\dfrac{k}{2}(\varphi-\sin\varphi)+k_2 \\ x=\dfrac{k}{2}(1-\cos\varphi),\quad k_1>0,\quad t\in(0,2\pi) \end{cases}$$

хэлбэртэй болно. $k_1,\ k_2$-г $x(t_0)=0,\quad x(t_1)=x^1$ нөхцөлөөс олно.

Жишээ 6. (Экстремаль цорын ганц оршдог боловч глобаль шийд биш байх тохиолдол)

$$J(x)=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(x'^2(t)-x^2(t)dt,\quad x(0)=x\Big(\frac{3\pi}{2}\Big)=0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)=-2x(t)-2x''(t)=0,\quad x''+x=0.$$

Энэ тэгшитгэлийн шийд нь

$$x(t)=C_1\sin t+C_2\cos t.$$

Цорын ганц шийд нь $x^*=x^*(t)=0,\quad t\in[0,3\frac{\pi}{2}]$.
Гэвч энэ нь бодлогын глобаль шийд болж чадахгүй, учир нь зорилгын функц доороосоо зааглагдаагүй байна.
Жишээлбэл, $x_n(t)=n\sin\frac{2}{3}t,\quad n=1,2,\dots$ дараалал авахад

$$J(x_n)=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\Big(\frac{4n^2}{9}\cos^2\frac{2t}{3}-n^2\sin^2\frac{2t}{3}\Big)dt=-\frac{5\pi n^2}{12}n\to\infty,\ n\to\infty \text{ үед.}$$

Нөгөө талаар, $\bar{x}_n(t)=\frac{1}{n}\sin\frac{2t}{3},\ \ n=1,2\dots$ дараалал авахад

$$|\bar{x}_n(t)-x^*|=\Big|\frac{1}{n}\sin\frac{2t}{3}\Big|=\frac{1}{n}\to 0,\quad n\to\infty\quad \text{үед}$$

$$|\bar{x}'_n(t)-x^{*\prime}|=\max_{t\in[0,\frac{3\pi}{2}]}\Big|\frac{2}{3n}\cos\frac{2t}{3}\Big|=\frac{2}{3n}\to 0,\quad n\to\infty\quad \text{үед.}$$

Өөрөөр хэлбэл $x^*\equiv 0$ цэгийн сул орчинд $\bar{x}_n(t)$ дарааллын цэгүүд оршиж байна.
Гэвч

$$J(\bar{x}_n)=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\Big(\frac{4n^2}{9}\cos^2\frac{2t}{3}-\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{2t}{3}\Big)dt=-\frac{5\pi}{12n^2}<0=J(x^*)$$

Иймд x^* орчны сул минимумын цэг ч болж чадахгүй.

Жишээ 7. (Экстремаль цорын ганц оршдог бөгөөд глобаль минимумын цэг байх)

$$J(x) = \int_0^1 x'^2(t)dt \to \min, \qquad x(0) = x(1) = 0.$$

Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл зохиож экстремалийг олбол:

$$x'' = 0 \Rightarrow x^*(t) \equiv 0 \quad J(x) \geq J(x^*) = 0, \qquad x \in D.$$

Жишээ 8. (Экстремаль нь сул минимуын цэг боловч, хүчтэй минимумын цэг болж чадахгүй тохиолдол)

$$J(x) = \int_0^1 x'^3(t)dt \to inf,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0.$ $\dfrac{\partial F}{\partial x'} = 3x'^2$ тул Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл дараах хэлбэртэй болно.

$\dfrac{d}{dt}(3x'^2) = 0 \Rightarrow 3x'^2 = C, \quad x' = C_1$

$x = C_1 t + C_2, \quad x^*(t) = t$

$\eta(t) \in C^1(T): \quad \eta(0) = \eta(1) = 0, \quad T = [0,1]$ болог. Тэгвэл $x^*(t) + \eta(t)$ функц нь боломжит муруй болох нь илэрхий.

$$J(x^*(t) + \eta(t)) = \int_0^1 ((t + \eta(t))'^3 dt = \int_0^1 (1 + \eta'(t))^3 dt =$$

$$\int_0^1 (1+3\eta'^2+3\eta'+\eta'^3)dt = J(x^*(t))+3\int_0^1 \eta'(t)dt+\int_0^1 (3\eta'^2+\eta'^3)dt =$$

$$= J(x^*(t)) + \int\limits_0^1 (3\eta'^2 + \eta'^3)dt$$

Хэрэв $3\eta'^2 + \eta'^3 \geq 0$ буюу $\eta'^2(3+\eta') \geq 0, \quad t \in [0,1], \quad \eta' \geq -3$ буюу $||\eta'||_{C^1} = \max\limits_{t\in[0,1]} ||\eta'(t)|| \leq 3$ үед $J(x^* + \eta) \geq J(x^*)$ болж $x^*(t)$ нь орчны сул минимумын цэг болно. Нөгөө талаар $x_n(t) = x^*(t) + \delta_n(t)$ функцуудын дараалал байгуулъя. Үүнд $\delta_n(0) = \delta_n(1) = 0$.

$$\delta'_n(t) = \begin{cases} -\sqrt{n}, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{\sqrt{n}}{(n-1)}, & \dfrac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Одоо x_n дараалал нь x^* цэгийн ε орчинд орших буюу $||x_n - x_n^*||_C = ||\delta_n(t)||_C = \max\limits_{t\in[0,1]} ||\delta_n(t)| \leq \varepsilon$ гэдгийг харуулья.

$0 \leq t \leq \dfrac{1}{n}, \quad t \in (0,1)$ үед $\delta_n(t) = \int\limits_0^t \delta'_n(t)dt = \int\limits_0^t -\sqrt{n}dt = -\sqrt{n}t$ ба мөн $\delta_n(t)$ функцийг $0 \leq t \leq 1, \quad \dfrac{1}{n} < t \leq 1$ үед

$$\delta_n(t) = \int\limits_0^t \delta'_n(t)dt = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \delta'_n(t)dt + \int\limits_{\frac{1}{n}}^t \delta'_n(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (-\sqrt{n})dt + \int\limits_{\frac{1}{n}}^t \Big(\frac{\sqrt{n}}{n-1}\Big)dt = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{n-1}\Big(t - \frac{1}{n}\Big)$$

гэж тус тус олбол:

$$\delta_n(t) = \begin{cases} -\sqrt{nt} & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{\sqrt{n}}{(n-1)}\Big(t - \dfrac{1}{n}\Big), & \dfrac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

$\max\limits_{t\in[0,1]} |\delta_n(t)| = \max\{\max\limits_{t\in[0,\frac{1}{n}]} \| -\sqrt{n}t, \|, \max\limits_{t\in[\frac{1}{n},1]} |\frac{-1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{n-1}\Big(t - \frac{1}{n}\Big)|\} = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad n \to \infty$ үед.
Нөгөө талаар

$$J(x_n)=J(x^*)+\int\limits_0^1 (3x'^2+x'^3)dt=1+\int\limits_0^{\frac{1}{n}} (3x'^2+x'^3)dt+\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 (3x'^2+x'^3)dt =$$

$$= 1 + \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (3n - n\sqrt{n})dt + \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \Big(3 \cdot \frac{n}{(n-1)^2} + \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)^3}\Big)dt =$$

$$= 1 + (3n - n\sqrt{n})\frac{1}{n} + \Big(3 \cdot \frac{n}{(n-1)^2} + \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)^3}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) =$$

$$= 1 + 3 - \sqrt{n} + \frac{3n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)}{n} + \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)^3} \cdot \frac{(n-1)}{n} =$$

$$= 4 - \sqrt{n} + \frac{3}{n-1} + \frac{\sqrt{n}}{(n-1)^2} \to -\infty, \quad n \to \infty \text{ үед.}$$

Иймд $\inf J(x) = -\infty$ болох бөгөөд x^* цэг нь хүчтэй минимумын цэг болж чадахгүй.

Жишээ 9. (Экстремаль оршдог бөгөөд цорын ганц глобаль минимумын цэг боловч $C^1[t_0, t_1]$ ангид харъяалагдахгүй.)

$$J(x) = \int\limits_0^1 t^{\frac{2}{3}} x'^2(t)dt \to inf, \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Энэ бодлогын хувьд Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл зохиовол:

$$\frac{d}{dt}(2t^{\frac{2}{3}}x') = 0, \quad t^{\frac{2}{3}}x' = C_1 \quad \frac{dx}{dt} = C_1 t^{-\frac{2}{3}},$$

$$x(t)=\int C_1 t^{-\frac{2}{3}}dt = C_1 t^{\frac{1}{3}} + C_2.$$

Эндээс $x^* = t^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{t}, \quad x^{*\prime} = \dfrac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$

$$J(x^*) = \int_0^1 t^{\frac{2}{3}}\frac{1}{9}t^{-\frac{4}{3}}dt = \frac{1}{9}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{3}\sqrt[3]{t}|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Нөгөө талаас $x^*(t) = t^{\frac{1}{3}}$ глобаль минимумын цэг болно. Дээрх функционалын хувьд үүнийг шалгавал: дурын $\tilde{x}$, $\eta(t) \in C^1[0,1] : \eta(t) = \eta(1) = 0$ функцүүдийн хувьд $J(\tilde{x}) \geq J(x^*)$ тэнцэтгэл биш илэрхий биелэгдэнэ. Гэвч $x^*(t) = t^{\frac{1}{3}} \notin C^1[0,1]$ илэрхий юм.

Жишээ 10. $J(x)=\int_0^T (x'^2(t)-x^2(t)dt \to inf,\ x(0)=0,\ x(T)=0$

Энэ функционалыг $\int_0^T (x'(t)-x(t)\mathrm{ctg}t)^2 dt$ хэлбэрт тавъя. Үүнийг шалгавал:

$$\int_0^T (x'(t)-x(t)\mathrm{ctg}t)^2dt = \int_0^T (x'^2+x^2\mathrm{ctg}^2t-2x'x\mathrm{ctg}t)dt = \int_0^T (x'^2-x^2)dt.$$

Эйлерийн тэгшитгэл нь $x''+x=0$. Ерөнхий шийд нь $x(t) = C_1\cos t + C_2 \sin t$. $x(0) = 0$ тул $C_1 = 0$, $x(t) = C_2\sin t$. Экстремалийг T-ээс хамааруулан шинжилье. Хэрэв $T \leq \pi$ бол $C_2 = 0$ ба $x^*(t) = 0$

$$J(x) = \int_0^T (x'(t) - x(t)\mathrm{ctg}t)^2 dt \geq J(x^*) = 0.$$

Иймд экстремаль $x^* = 0$ нь бодлогын глобаль минимумын цэг болно. $T = \pi$ үед $x^*(t, C) = C\sin t$ тоо томшгүй олон шийдтэй. Энэ үед

$$J(x^*){=}\int_0^T(C^2\cos^2 t{-}C\sin^2 t)dt{=}C^2\int_0^{\pi}\cos 2tdt{=}\frac{C^2}{2}\sin 2t|_0^{\pi}{=}0.$$

Одоо $T>\pi$ гэе. Тэгвэл $x(t,\lambda)=\lambda\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ гэвэл
$J(x(t,\lambda))=\frac{T\lambda^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{T^2}-1\right)\to+\infty,\quad \lambda\to\infty.$
$\lambda\to 0$ үед $||x(t,\lambda)-x^*||_{C^1}\le\varepsilon$ болох ба $x^*(t)$ нь орчны сул минимумын ч цэг болж чадахгүй байна. Иймд:
1. $T\le\pi$ үед $J(x^*)=0$
2. $T=\pi$ үед Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл цорын ганц шийдтэй бөгөөд энэ нь бодлогын глобаль минимумын цэг юм.
3. Хэрэв $T>\pi,\ T=\pi k,\ k>1$ бол Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл тоо томшгүй олон шийдтэй бөгөөд эдгээр нь хүчтэй ба сул минимумын цэгийн аль нь ч болж чадахгүй.
4. $T>\pi,\ T\ne\pi k$ үед Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл цорын ганц шийдтэй бөгөөд энэ шийд нь хүчтэй ба сул минимумын цэгийн аль нь ч болж чадахгүй байна.

Жишээ 11. (Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлд нэг ч шийд оршихгүй тохиолдол)

$$J(x)=\int_0^1 t^2x'^2dt\to\min,\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$$

Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл $\frac{d}{dt}(2t^2x')=0$. Түүний ерөнхий шийд нь $x(t)=\frac{C}{t}+D$ бөгөөд анхны нөхцлийг хангахгүй байна. Түүнээс гадна энэ бодлогын шийд абсолют тасралтгүй функцийн ангид оршихгүй байна. Учир нь хэрэв бид дараах дарааллыг сонгон авбал:

$$y_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \le t \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

үед

$$y_n'(t) = \begin{cases} n, & 0 \le t \le \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

болох ба

$$J(y_n) = \int\limits_0^1 t^2 y_n'^2 dt = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} t^2 n^2 dt = n^2 \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Иймд энэ бодлогын хувьд шийд оршихгүй боловч, багасгагч дараалал оршиж байна. Одоо орчны хүчтэй минимумын цэгийн хувьд оновчтой нөхцлийг шалгахын тулд дараах Лемм баталъя.

Лемм. (Дюбуа-Реймонд) Хэрэв $a(t)$ тасралтгүй функцийн хувьд $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)\beta(t)dt = 0$ тэнцэтгэл нь $\int\limits_{t_0}^{t_1} \beta(t)dt = 0$ нөхцлийг хангадаг бүх тасралтгүй функцүүд $\beta(t)$-ийн хувьд биелэгдэж байвал $a(t) \equiv const, \quad t \in [t_0, t_1]$ байна.

Баталгаа. Дунджийн теорем ёсоор тогтмол тоо C орших бөгөөд $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)dt = C(t_1 - t_0) \Rightarrow \int\limits_{t_0}^{t_1} [a(t) - C] = 0$ биелэгдэнэ. Эндээс $\beta(x)$-ийн хувьд $\int\limits_{t_0}^{t_1} [a(t) - C]\beta(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)\beta(t)dt - C\int\limits_{t_0}^{t_1} \beta(t)dt = 0.$

Хэрэв $\beta(t) = a(t) - C$ гэж авбал $\int\limits_{t_0}^{t_1} [a(t) - C]^2 dt = 0, \quad \Rightarrow$ $a(t) \equiv C, \quad t \in [t_0, t_1]$.

1.3 Вейерштрассын зайлшгүй нөхцөл

$f : \mathbb{R}^n \to R$ дифференциалчлагддаг функц авч үзье.

$$E_f(x, y) = f(y) - f(x) - < f'(x), y - x >$$

нөхцлөөр тордорхойлогдсон

$$E_f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to R$$

функцийг Вейерштрассын функц гэж нэрлэнэ. $<, >$-нь хоёр векторын скаляр үржвэрийг тэмдэглэнэ. Хэрэв f гүдгэр функц бол $E_f(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ илэрхий юм.

Вариац тооллын үндсэн бодлогыг авч үзье.

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(x, x', t) \to \min, \tag{1.15}$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1, \tag{1.16}$$

үүнд $F(x, x', t)$ бүх хувьсагчуудынхаа хувьд тасралтгүй дифференциалчлагдана. Одоо Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийн интеграл хэлбэрийг гаргая. Үүний тулд (1.15) бодлогын хувьд функционалын 1-р вариацыг $x^* = x^*(t)$ экстремаль дээр бичвэл:

$$\delta J(x^*) \triangleq \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} \eta(t) + \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} \eta' \right] dt = 0$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x}\eta(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[-\frac{d}{dt}\int\limits_{t}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x'}d\tau \right] \eta(t)dt =:$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} dv = -\dfrac{d}{dt}\left[\int\limits_{t}^{t_1} \dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x}d\tau\right]dt, & v = -\int\limits_{t}^{t_1} \dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x}d\tau \\ u = \eta(t) & du = \eta'(t)dt \end{array} \right\} :=$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x}d\tau \cdot \eta(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\int\limits_{t}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x}d\tau \right] \eta'(t)dt.$$

Тэгвэл

$$\delta J(x^*) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x}d\tau \right] \eta'(t)dt = 0.$$

Өмнөх Леммыг ашиглавал $x^*(t)$ экстремаль нь дараах Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийн интеграл хэлбэрийг хангана.

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x}d\tau = C$$

Иймд $x^*(t)$ экстремалийн хувьд

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} = -\int\limits_{t}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x}dt + C \tag{1.17}$$

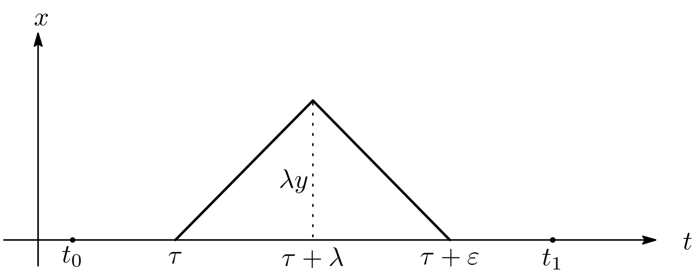
Энэ илэрхийллийн баруун тал нь тасралтгүй дифференциалчлагддаг функц юм. Иймд зүүн тал нь t-ээр тасралтгүй уламжлалтай байх ёстой. Иймд экстремалийн дагуу $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial x'}$ оршино. Энэ бодлогын хувьд Вейерштрассын функцийг бичвэл:

$$B(x, x', y, t) = F(x, y, t) - F(x, x', t) - F_{x'}(x, x', t)(y - x') \tag{1.18}$$

Теорем 3. *$x^* = x^*(t)$ нь (1.15) бодлогын экстремаль болог. Тэгвэл $x^*(t)$ нь (1.15) бодлогын орчны хүчтэй минимумын цэг байх зайлшгүй нөхцөл нь дурын $y \in R$ ба $t \in (t_0, t_1)$-ийн хувьд $B(x^*, x^{*\prime}, y, t) \geq 0$ биелэгдэж байх явдал юм. (Энэ нөхцлийг хүчтэй минимумын цэгийн Вейерштрассын нөхцөл гэж нэрлэнэ.)*

Баталгаа. Хэрэв $F(x, x', t)$ функциональ нь x'-ийн хувьд гүдгэр бол дээрх нөхцөл илэрхий биелэгдэнэ. Дурын $\tau \in (t_0, t_1)$-ийн хувьд эерэг тоо ε-г $\varepsilon + \tau < t_1$ байхаар сонгоё. Мөн $0 < \lambda < \varepsilon$ болог. $\eta(t, \lambda)$-ээр дараах тасралтгүй функцийг тэмдэглэвэл:

$$\eta(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & t \notin [\tau, \tau+\varepsilon] \quad \text{үед} \\ \lambda y, & t = \tau + \lambda, \quad y \in R \quad \text{үед} \\ \text{шугаман функц} & t \in [\tau, \tau+\lambda] \text{ ба } t \in [\tau+\lambda,\ \tau+\varepsilon]. \end{cases}$$



$$\eta'(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & t \notin [\tau, \tau+\varepsilon] \quad \text{үед} \\ y, & t \in [\tau, \tau+\lambda] \quad \text{үед} \\ -\dfrac{\lambda y}{(\varepsilon-\lambda)} & t \in [\tau+\lambda, \tau+\varepsilon] \quad \text{үед.} \end{cases}$$

$\eta(t, \lambda)$ функц нь "зүү" хэлбэртэй байна. Одоо $x(t, \lambda)$ -г байгуулъя.

$$x(t,\lambda) = x^*(t) + \eta(t,\lambda)$$

Мөн $\varphi(\lambda)$ функцийг $\varphi(\lambda) = J(x(t,\lambda))$ гэж тодорхойлбол:

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(x(t,\lambda), x'(t,\lambda), t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(x^* + \eta(t,\lambda), x^{*\prime}(t,\lambda) + \eta'(t,\lambda), t)dt =$$

$$= J(x^*) + \int\limits_{\tau}^{\tau+\lambda} F(x^* + (t-\tau)y, x^{*\prime} + y, t)dt +$$

$$\int\limits_{\tau+\lambda}^{\tau+\varepsilon} F\left(x^* + \lambda y - \frac{\lambda y(t-\tau-\lambda)}{\varepsilon-\lambda}, x^{*\prime} - \frac{\lambda y}{\varepsilon-\lambda}, t\right) dt - \int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon} F(x^*, x^{*\prime}, t)dt$$

Энэ функцээс λ параметрээр уламжлал авбал

$$\varphi'(\lambda) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\lambda} \left[\frac{\partial F(x^* + (t-\tau)y, x^{*\prime} + y, t)}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial x'} x'_\lambda\right] dt +$$

$$F(x^* + (\tau+\lambda-\tau)y, x^{*\prime} + y, \tau+\lambda) +$$

$$\int\limits_{\tau+\lambda}^{\tau+\varepsilon} \Big[\frac{\partial F(x^* + (t-\tau)y, x^{*\prime} + y, t)dt}{\partial x} \cdot \Big(y - \frac{y(t-\tau-\lambda) + \lambda y(t-\tau-\lambda)}{(\varepsilon-\lambda)^2}\Big) +$$

$$\frac{\partial F(x^* + (t-\tau)y, x^* + y, t)}{\partial x'} \cdot \Big(-\frac{y(\varepsilon-\lambda) + \lambda y}{(\varepsilon-\lambda)^2}\Big)\Big] dt -$$

$$F\Big(x^* + \lambda y - \frac{\lambda y(\tau+\lambda-\tau-\lambda)}{\varepsilon-\lambda}, x^{*\prime} - \frac{\lambda y}{\varepsilon-\lambda}, \tau+\lambda\Big).$$

Одоо $\lambda = 0$ үед $\varphi'(0)$-г олъё.

$$\varphi'(+0) = F(x^*, x^{*\prime} + y, \tau) +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \left[\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x}\Big(y - \frac{y(t-\tau)\varepsilon}{\varepsilon^2}\Big) + \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\Big(-\frac{y\varepsilon}{\varepsilon^2}\Big)\right] dt -$$

$$-F(x^*,x^{*\prime},\tau)=F(x^*,x^{*\prime}+y,\tau)-F(x^*,x^{*\prime},\tau)+$$
$$+y\int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\frac{\partial F(x^*,x^{*\prime},t)}{\partial x}dt-\frac{y}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\frac{\partial F(x^*,x^{*\prime},t)}{\partial x'}dt-$$
$$-\frac{y}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\left[\frac{\partial F(x^*,x^{*\prime},t)}{\partial x'}(t-\tau)\right]dt.$$

Одоо

$$\left|\frac{y}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\frac{\partial F(x^*,x^{*\prime},t)}{\partial x'}(t-\tau)dt\right|\le\frac{|y|}{\varepsilon}\cdot M\cdot\int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon}(t-\tau)dt=$$
$$\frac{M|y|}{\varepsilon}\cdot\frac{(t-\tau)^2}{2}\bigg|_{\tau}^{\tau+\varepsilon}=\frac{M|y|}{2}\varepsilon$$

гэдгийг харгалзан үзвэл:

$$\varphi'(+0)=F(x^*,x^{*\prime}+y,\tau)-F(x^*,x^{*\prime},\tau)+$$
$$+y\int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\frac{\partial F(x^*,x^{*\prime},t)}{\partial x}dt-\frac{y}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\frac{\partial F(x^*,x^{*\prime},t)}{\partial x'}dt+0(\varepsilon).$$

Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийн интеграл хэлбэрийг ашиглая.

$\dfrac{\partial F(x^*,x^{*\prime},t)}{\partial x'}+\displaystyle\int\limits_{t}^{t_1}\dfrac{\partial F(x^*,x^{*\prime},\tau)}{\partial x}d\tau=C$ тул

$$\frac{\partial F(x^*(\tau+\varepsilon),x^{*\prime}(\tau+\varepsilon),\tau+\varepsilon)}{\partial x'}=C-\int\limits_{\tau+\varepsilon}^{t_1}\frac{\partial F(x^*,x^{*\prime},t)}{\partial x}dt$$

болох ба эндээс

$$\frac{\partial F(x^*(\tau+\varepsilon),x^{*\prime}(\tau+\varepsilon),\tau+\varepsilon)}{\partial x'}-\frac{\partial F(x^*,x^{*\prime},\tau)}{\partial x}=$$

$$\int_{\tau}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} dt - \int_{\tau+\varepsilon}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} dt = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} dt$$

Тэгвэл

$$\varphi'(+0) = F(x^*, x^{*\prime} + y, \tau) - F(x^*, x^{*\prime}, \tau) - y \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x'} +$$

$$+y \left[\frac{\partial F(x^*(\tau+\varepsilon), x^{*\prime}(\tau+\varepsilon), \tau+\varepsilon)}{\partial x'} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} dt \right] + 0(\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\dfrac{\partial F(x^*(\tau+\varepsilon), x^{*\prime}(\tau+\varepsilon), \tau+\varepsilon)}{\partial x'}}{1} =$$

$= \dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x'}$ тул $\varphi'(+0)$ илэрхийлэлд $\varepsilon \to 0$ гэж үзвэл

$$\varphi'(+0) = F(x^*, x^{*\prime} + y, \tau) - F(x^*, x^{*\prime}, \tau) - y \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x'}.$$

Нөгөө талаар, хэрэв $x^*(t)$ нь (1.15) бодлогын орчны хүчтэй минимумын цэг бол $\varphi'(+0) \geq 0$ нөхцөл биелэгдэнэ. (Учир нь $\varphi(\lambda) \geq \varphi(0), \quad |\lambda| \leq \delta, \quad \exists \delta > 0$).
Өөрөөр хэлбэл, 0 цэг нь $\varphi(\lambda)$ функцийн орчны минимумын цэг бол $\varphi'(+0) \geq 0$ илэрхий юм. Иймд

$$F(x^*, x^{*\prime} + y, \tau) - F(x^*, x^{*\prime}, \tau) - y \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x} \geq 0$$

, $\forall y \in R, \quad \forall \tau \in [t_0, t_1]$ болж теорем батлагдав. ■

Лежандрын нөхцөл.

Теорем 4. *Хэрэв $x^* = x^*(t)$ нь (1.15)-(1.16) бодлогын орчны сул минимумын цэг бол*

$$\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'^2} \geq 0, \quad t \in]t_0, t_1[\tag{1.19}$$

нөхцөл биелэгдэнэ.

Баталгаа. Эсрэгээс нь баталья. Өөрөөр хэлбэл $\tau \in (t_0, t_1)$ цэгийн хувьд

$$\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x'^2} = \alpha < 0 \tag{1.20}$$

биелэгдэнэ гэж үзье. Тэгвэл (1.20) илэрхийллийн зүүн тал нь тасралтгүй учраас эерэг тоо $\varepsilon_1 > 0$ орших бөгөөд

$$\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, \tau)}{\partial x'^2} < \frac{\alpha}{2} < 0,\ t \in (\tau - \varepsilon_1, \tau + \varepsilon_1),\ \tau \in (t_0, t_1) \tag{1.21}$$

$[t_0, t_1]$ хэрчим дээр $\eta = \eta(t)$ функцийг дараах хэлбэрээр байгуулъя.

$$\eta(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \pi(t - \tau + \varepsilon)}{2\varepsilon}, & t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon),\ \varepsilon < \varepsilon_1 \\ 0, & t \notin (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon),\ \varepsilon > 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\eta'(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\varepsilon} \sin \dfrac{\pi(t - \tau + \varepsilon)}{2\varepsilon} \cos \dfrac{\pi(t - \tau + \varepsilon)}{2\varepsilon}, & t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon), \\ & \varepsilon < \varepsilon_1,\ \varepsilon > 0 \\ 0, & t \notin (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \end{cases}$$

Нөгөө талаар Теорем 1 ёсоор $\delta^2 J(x^*) \geq 0$ байх ёстой.

$$\delta^2 J(x^*) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x^2} \eta^2(t) + 2 \frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x \partial x'} \eta(t) \eta'(t) +$$

$$+\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'^2}\eta'^2(t)\Big]dt \geq 0$$

$\dfrac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x \partial x'}$ функцүүд зааглагдсан тул

$$\left|\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x^2}\right| \leq M, \quad \left|\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x \partial x'}\right| \leq N, \quad M, N = const$$

$\eta = \eta(t)$ функцийн хувьд $|\eta(t)| \leq 1, \quad |\eta'(t)| \leq \dfrac{\pi}{\varepsilon}, \quad t \in [t_0, t_1]$ гэдгийг байгуулалтаас хялбархан харж болно.

$$\delta^2 J(x^*) = \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \Big[\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x^2}\eta^2(t) + 2\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x \partial x'}\eta(t)\eta'(t) +$$

$$+\frac{\partial^2 F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'^2}\eta'^2\Big]dt < 2M\varepsilon + 2N\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\frac{\pi}{\varepsilon}dt + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}dt =$$

$$= 2M\varepsilon + \frac{4N\pi\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}2\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}[\alpha\pi^2 + 4N\pi\varepsilon + 2M\varepsilon^2] = \frac{1}{\varepsilon}[\alpha\pi^2 + \varepsilon(4N\pi + 2M\varepsilon)]$$

$\alpha < 0$ учраас ε-ийн хүрэлцээтэй бага утганд $\delta^2 J(x^*) < 0$ болж $\delta^2 J(x^*) \geq 0$ гэдэгт харшлах учраас теорем батлагдав. ■

Бүлэг 2

Вариац тооллын бусад бодлогууд

2.1 Бэхлэгдсэн ба бэхлэгдээгүй төгсгөлүүдтэй вариац тооллын бодлого

Бэхлэгдээгүй төгсгөлтэй вариац тооллын бодлого
I.

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)dt \to \min, \quad x \in C^1(T), \tag{2.1}$$

үүнд $T = [t_0, t_1]$ өгөгдсөн. x^0, x^1-үүд бэхлэгдээгүй болог. ($x^0 = x(t_0), \quad x^1 = x(t_1)$) Одоо (2.1) бодлогын орчны сул минимумын цэгийн оновчтой нөхцлийг тодорхойлъё. Үүний тулд аргументийн вариацыг тодорхойлбол:

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t), \quad \varepsilon > 0, \quad \eta(t) \in C^1(T).$$

Урьд нь тодорхойлж байсантай адилаар 1-р вариацыг бичвэл

$$\delta J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(x, x', t)}{\partial x} \eta(t) + \frac{\partial F(x, x', t)}{\partial x'} \eta'(t) \right] dt$$

x^* сул минимумын цэг бол $\delta J(x^*) = 0$ байдаг. Иймд

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} \eta(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} \right] \eta(t) dt = 0$$

Теорем 5. *$x^* = x^*(t)$ функц нь (2.1) бодлогын орчны сул минимумын цэг болог. Тэгвэл $x^* = x^*(t)$ нь*

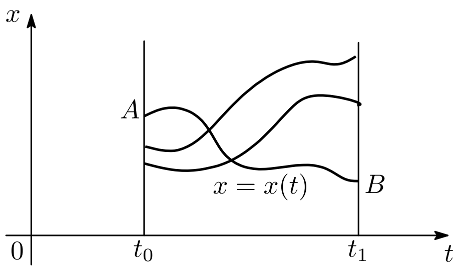
$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big) = 0 \qquad (2.2)$$

гэсэн Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл ба

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x, x', t_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, x', t_1)}{\partial x'} = 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

захын нөхцлийг хангана.

Баталгаа.



Хэрэв $x^* = x^*(t)$ (AB)-муруй бодлогын шийд бол A ба B цэгүүд дээр төгсгөлүүдтэй муруйнууд дотроос x^* муруй мөн функционалд хамгийн (орчны) бага утга олгоно.

Өөрөөр хэлбэл, $x^*(t)$ Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийг хангана.

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} = 0.$$

Нөгөө талаар $\eta(t)$ функц нь дурын тул

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

тэнцэтгэл нь зөвхөн

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_0)}{\partial x'} = \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_1)}{\partial x'} = 0$$

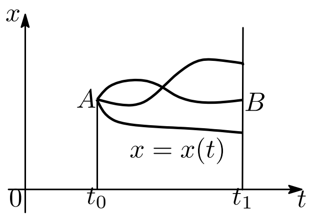
үед биелэгдэнэ. Иймд теорем батлагдав. ■

(2.2) гэсэн тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь $x = x(t, c_1, c_2)$ болог. $A(t_0, x^0)$, $B(t_1, x^1)$. Тэгвэл $x^0 = x(t_0, c_1, c_2)$, $x^1 = x(t_1, c_1, c_2)$. Иймд c_1 ба c_2-г

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x(t_o, c_1, c_2), x'(t_o, c_1, c_2), t_0)}{\partial x'} = 0 \\ \dfrac{\partial F(x(t_1, c_1, c_2), x'(t_1, c_1, c_2), t_1)}{\partial x'} = 0 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системээс бодож олно.

II. Одоо (2.1) бодлогын хувьд $x(t_0) = x^0$ өгөгдсөн болог. Өөрөөр хэлбэл, $T = [t_0, t_1]$ өгөгдсөн x^1 өгөгдөөгүй.



Тэгвэл $\tilde{x} = x^*(t) + \varepsilon\eta(t)$, $\eta \in C^1(T)$, $\eta(t_0) = 0$ хэлбэртэйгээр вариац байгуулбал өмнөх теоремын нөхцөл өөр хэлбэртэй бичигдэнэ.

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'} = 0 \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_1)}{\partial x'} = 0 \\ x^*(t_0) = x^0 \end{cases} \tag{2.5}$$

(2.4) тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь $x = x(t, c_1, c_2)$ болог. Тэгвэл $x' = x'(t, c_1, c_2)$ болох ба c_1, c_2-ыг

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x(t_1, c_1, c_2), x'(t_1, c_1, c_2), t_1)}{\partial x'} = 0 \\ x^*(t_0, c_1, c_2) = x^0 \end{cases}$$

системийг бодож олно. Үүний дараа B цэгийг олбол:

$$B(t_1, x(t_1, c_1, c_2))$$

III. (2.1) бодлогын хувьд $T = [t_0, t_1]$ ба x^0, x^1 өгөгдөөгүй болог.
$t_0^* < t_1^*$ нөхцлийг хангах t_0^*, t_1^* утгууд орших бөгөөд $x^*{=}x^*(t)$ нь $T^* = [t_0^*, t_1^*]$ дээр орчны сул минимумын цэг болог.
Тэгвэл өмнөх теоремын нөхцөл ёсоор $x^* = x^*(t)$ нь (2.2) гэсэн Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийг хангахаас гадна (2.3) гэсэн нөхцөлийг $t_0 = t_0^*$, $t_1 = t_1^*$ цэгүүд дээр хангана. Одоо t_0^*, t_1^* цэгүүд дээр ямар нөхцөл биелэгдэхийг тодорхойлъё. Дурын бага Δ_0, Δ_1-ийн хувьд $t_0 = t_0^* + \varepsilon\Delta_0$, $t_1 = t_1^* + \varepsilon\Delta_1$-г тодорхойлъё. Үүнд ε-дурын параметр, $t_0 < t_1$. Функционалын өөрчлөлтийг авч үзье.

$$\Delta J(x^*, t_0^*, t_1^*) = \int\limits_{t_0^*+\varepsilon\Delta_0}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*, x^{*\prime}, t)dt - \int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} F(x^*, x^{*\prime}, t)dt =$$

$$= \int\limits_{t_0^*+\varepsilon\Delta_0}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*, x^{*\prime}, t)dt - \left(\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} F(x^*, x^{*\prime}, t)dt + \int\limits_{t_1^*}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*, x^{*\prime}, t)dt - \right.$$

$$-\left.\int\limits_{t_1^*}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*,x^{*\prime},t)dt\right) = \int\limits_{t_0^*+\varepsilon\Delta_0}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*,x^{*\prime},t)dt +$$

$$+\int\limits_{t_1^*}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*,x^{*\prime},t)dt - \int\limits_{t_0^*}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*,x^{*\prime},t)dt =$$

$$-\int\limits_{t_1^*+\varepsilon\Delta_1}^{t_0^*+\varepsilon\Delta_0} F(x^*,x^{*\prime},t)dt + \int\limits_{t_1^*}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*,x^{*\prime},t)dt -$$

$$-\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*,x^{*\prime},t)dt = -\int\limits_{t_0^*}^{t_0^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*,x^{*\prime},t)dt +$$

$$+\int\limits_{t_1^*}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*,x^{*\prime},t)dt =$$

$$= \left(-F(x^*,x^{*\prime},t_0)\Delta_0 + F(x^*,x^{*\prime},t_1)\Delta_1\right)\varepsilon + O(\varepsilon) \geq 0.$$

ε-ийн хүрэлцээтэй бага холбогдолд энэ нэмэгдэхүүний тэмдэг нь 1-р нэмэгдэхүүний тэмдгээр тодорхойлогдоно. Иймд ($\pm\varepsilon$ учир) $F(x^*,x^{*\prime},t_0^*)\Delta_0 + F(x^*,x^{*\prime},t_1^*)\Delta_1 = 0$ болох ба Δ_0,Δ_1-дурын учир

$$\begin{cases} F(x^*,x^{*\prime},t_1^*) = 0 \\ F(x^*,x^{*\prime},t_0^*) = 0 \end{cases}$$

байна.

Теорем 6. $x^* = x^*(t),\ \ t \in [t_0^*, t_1^*],\ \ t_0^* < t_1^*$ *нь (2.1) бодлогын орчны сул минимумын цэг болог. Тэгвэл бүх* $t \in [t_0^*, t_1^*]$*-ийн* *хувьд* $x^* = x^*(t)$ *нь (2.2) гэсэн Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл хангахаас гадна төгсгөлийн цэгүүд дээр*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_0^*)}{\partial x'} = 0, & \dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_1^*)}{\partial x'} = 0 \\ F(x^*, x^{*\prime}, t_0^*) = 0, & F(x^*, x^{*\prime}, t_1^*) = 0 \end{cases}$$

нөхцлүүд биелэгдэнэ.

IV.
$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)dt \to \min(\max),$
$x(t_0) = x^0$ (x^0 өгөгдсөн)
$x(t_1) = x^1$ (t_1, x^1 өгөгдөөгүй)
Бодлогын оновчтой шийд (t_1^*, x^*) болог.

$$t = t_1^* + \varepsilon \Delta t_1, \quad x = x^* + \varepsilon \eta(t), \quad \eta(t_0) = 0$$

(t_1^*, x^*) шийдийн хувьд Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\right] = 0$$

болон

$$\left[F(x^*, x^{*\prime}, t_1^*) - x^{*\prime}(t_1^*)\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_1^*)}{\partial x'}\right]\Delta t_1 + \\ + \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_1^*)}{\partial x'}\big(\eta(t_1^*) + x^{*\prime}(t_1^*)\Delta T_1\big) \tag{2.6}$$

нөхцөл биелнэ.
V. Одоо дээрх бодлогын хувьд x^1 бэхлэгдсэн, t_1 бэхлэгдээгүй бол (2.7) томьёо нь $\Delta x^1 = \eta(t_1^*) + x^{*\prime}(t_1^*)\Delta T_1 = 0$ болж (x^*, t_1^*) шийдийн хувьд $F(x^*, x^{*\prime}, t_1^*) - x^{*\prime}(t_1^*)\dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_1^*)}{\partial x'} = 0$ нөхцөл биелэгдэнэ.

VI.Одоо $T = [t_0, t_1]$ өгөгдөөгүй ба x^0, x^1 цэгүүд өгөгдсөн тохиолдол авч үзье. $x^* = x^*(t)$ орчны сул минимумын цэг болог. $\exists t_0^*, t_1^* : \ t_0^* < t_1^* : \ x^*(t_0) = x^0, \ x^*(t_1) = x^1, \ x^* = x^*(t)$ нь Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийг $T = [t_0^*, t_1^*]$ дээр хангана. $t_0 = t_0^* + \varepsilon\Delta_0, \ t_1 = t_1^* + \varepsilon\Delta_1 \Rightarrow x(t_0^* + \varepsilon\Delta_0) = x^0$,
$x(t_1^* + \varepsilon\Delta_1) = x^1$, $x(t) = x^* + \varepsilon\eta(t), \quad t \in [t_0, t_1]$.
Тэгвэл $\varepsilon \to 0$ үед

$$\Delta J(x^*, t_0^*, t_1^*) = \int\limits_{t_0^*+\varepsilon\Delta_0}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t)dt - \int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} F(x^*, x^{*\prime}, t)dt =$$

$$- \int\limits_{t_0^*}^{t_0^*+\varepsilon\Delta_0} F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t)dt + \int\limits_{t_1^*}^{t_1^*+\varepsilon\Delta_1} F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t)dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \Big[F(x^* + \varepsilon\eta, x^{*\prime} + \varepsilon\eta, t)dt - F(x^*, x^{*\prime}, t)dt\Big] dt \geq 0$$

биелнэ.
Дараах хувиргалтуудыг хийе.

$$F(x^* + \varepsilon\eta, x^{*\prime} + \varepsilon\eta', t) = F(x^*, x^{*\prime}, t) + \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x}\varepsilon\eta +$$

$$+ \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\varepsilon\eta' + O(\varepsilon).$$

Эндээс

$$\varphi_i(\varepsilon) = \int\limits_{t_i^*}^{t_i^*+\varepsilon\Delta_i} F(x^* + \varepsilon\eta, x^{*\prime} + \varepsilon\eta', t)dt, \quad \varphi_i(0) = 0,$$

$$\varphi_i(\varepsilon) = \varphi_i'(0)\varepsilon + 0(\varepsilon), \quad i = 0, 1$$

$$\varphi_i'(\varepsilon) = \int\limits_{t_i^*}^{t_i^*+\varepsilon\Delta_i} \Big[\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x}\eta + \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta'\Big]dt+$$

$$+F(x^*(t_i+\varepsilon\Delta_i)+\varepsilon\eta(t_i+\varepsilon\Delta_i), x^{*\prime}(t_i+\varepsilon\Delta_i)+\varepsilon\eta'(t_i+\varepsilon\Delta_i),\ \ t_i+\varepsilon\Delta_i)\Delta_i,$$

$$\varphi'(0) = F(x^* + \varepsilon\eta, x^{*\prime} + \varepsilon\eta', t_i)\Delta_i$$

Иймд

$$\int\limits_{t_i^*}^{t_i^*+\varepsilon\Delta_i} F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t)dt = F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t_i)\varepsilon\Delta_i+O(\varepsilon)$$

Нөгөө талаар

$$\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \big[F(x^* + \varepsilon\eta, x^{*\prime} + \varepsilon\eta', t) - F(x^*, x^{*\prime}, t)\big]\, dt =$$

$$\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \left[\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x}\varepsilon\eta(t) + \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\varepsilon\eta'(t) + O(\varepsilon)\right] dt$$

Одоо дараах интегралыг тусад нь бодвол:

$$\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\varepsilon\eta'(t)dt = \varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta(t)\Big|_{t_0^*}^{t_1^*}-$$

$$-\varepsilon\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\right)\eta(t)dt.$$

Тэгвэл

$$\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \left[F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t) - F(x^*, x^{*\prime}, t)\right] dt =$$

$$\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \left[\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\right) dt\right] \varepsilon\eta(t)dt+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta(t)\Big|_{t_0^*}^{t_1^*} + O(\varepsilon).$$

$x^*(t)$ экстремаль учир Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийг хангана. Иймд

$$\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \left[F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t) - F(x^*, x^{*\prime}, t)\right] dt =$$

$$= \varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta(t)\Big|_{t_0^*}^{t_1^*} + O(\varepsilon).$$

Нөгөө талаар

$$\int\limits_{t_i^*}^{t_i^*+\varepsilon\Delta_i} F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t)dt = F(x^*+\varepsilon\eta, x^{*\prime}+\varepsilon\eta', t_i^*)\varepsilon\Delta_i + O(\varepsilon).$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta(t)\right)\Big|_{t_i^*}^{t_i^*+\varepsilon\Delta_i} =$$

$$= \varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta(t)\Big|_{t_i^*}^{t_i^*+\varepsilon\Delta_i} = \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\Big|_{t=t_i^*+\varepsilon\Delta_i}$$

$$\cdot\Big(x(t_i^*+\varepsilon\Delta_i) - x^*(t_i^*+\varepsilon\Delta_i)\Big) - \varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\Big|_{t=t_i^*}$$

$$\cdot\big(x(t_i^*) - x^*(t_i^*)\big) = \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\Big|_{t=t_i^*+\varepsilon\Delta_i}\cdot$$

$$\cdot\Big(x(t_i^* + \varepsilon\Delta_i) - x^*(t_i^*) - x^*(t_i^* + \varepsilon\Delta_i) + x^*(t_i^*)\Big) -$$

$$-\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\Big|_{t=t_i^*}\cdot\Big(x(t_i^*) - x^*(t_i^*)\Big)$$

Иймд

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta(t)\right)\Bigg|_{t_i^*}^{t_i^*+\varepsilon\Delta_i} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\Big|_{t=t_i^*+\varepsilon\Delta_i}\cdot\left(-\frac{x^*(t_i^* + \varepsilon\Delta_i) - x^*(t_i^*)}{\varepsilon\Delta_i}\right)\varepsilon\Delta_i =$$

$$= -\varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}x^{*\prime}(t)\Big|_{t=t_i^*}\cdot\varepsilon\Delta_i + O(\varepsilon) - \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\varepsilon\eta(t)\Big|_{t=t_i^*}.$$

$$\Delta J(x^*, t_0^*, t_1^*) = -F(x^*, x^{*\prime}, t_0)\varepsilon\Delta_0 + \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}x^{*\prime}(t)\Big|_{t=t_0^*}\varepsilon\Delta_0 +$$

$$+\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\varepsilon\eta(t)\Big|_{t=t_0^*} + F(x^*, x^{*\prime}, t_1)\varepsilon\Delta_1 - \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}x^{*\prime}(t)\Big|_{t=t_1^*}\cdot\varepsilon\Delta_1$$

$$-\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\varepsilon\eta(t)\Big|_{t=t_1^*} + \varepsilon\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\eta(t)\Big|_{t_0^*}^{t_1^*} + O(\varepsilon).$$

$$\Delta J(x^*, t_0^*, t_1^*) = \left[-F(x^*, x^{*\prime}, t_0) + \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_0)}{\partial x'}x^{*\prime}(t_0)\right]\varepsilon\Delta_0 +$$

$$\left[F(x^*, x^{*\prime}, t_1) - \frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_1)}{\partial x'}x^{*\prime}(t_1^*)\right]\varepsilon\Delta_1 + O(\varepsilon).$$

Δ_0, Δ_1-дурын учир
$-F(x^*, x^{*\prime}, t_i) + \dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t_i)}{\partial x'}x^{*\prime}(t_i) = 0, \quad i = 0, 1$ тэнцэтгэл хүчинтэй байна.

VII. Хөдөлгөөнтэй төгсгөлүүдтэй вариац тооллын бодлого.
$F = F(t, x, x')$ функц бүх аргументынхаа хувьд 3 дахин дифференциалчлагдана. XOT хавтгай дээр

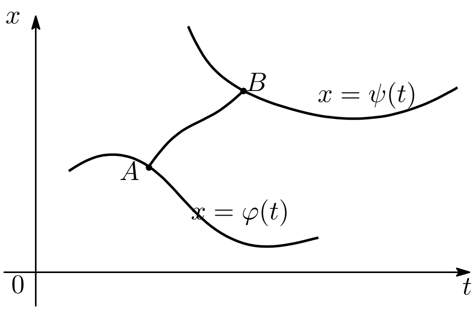
$$x = \varphi(t) \quad \text{ба} \quad x = \psi(t) \tag{2.7}$$

муруйнууд өгөгджээ.

$$\varphi(t) \in C^1(T), \quad \psi(t) \in C^1(T), \quad T = [t_0, t_1],$$

$$J(x) = \int_E F(t, x, x')dt \tag{2.8}$$

функционал нь $x = x(t)$ муруй дээр тодорхойлогдсон бөгөөд энэ муруйн төгсгөлийн $A(t_0, x_0)$, $B(t_1, x_1)$ цэгүүд нь (2.7) гэсэн муруйнууд дээр байрласан болог.



Өөрөөр хэлбэл $x_0 = \varphi(t_0)$, $x_1 = \psi(t_1)$. Дараах вариац тооллын бодлогыг томъёолъё.

$$J(x) = \int_E F(t, x, x')dt \to \min \tag{2.9}$$

$$E : x = x(t), \quad x_0 = \varphi(t_0), \quad x = \psi(t_1) \tag{2.10}$$

Теорем 7. *$x^* = x^*(t)$ муруй нь (2.9)-(2.10) бодлогын шийд болог. Тэгвэл $x^* = x^*(t)$ функц нь Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэлийг хангах бөгөөд $A(t_0, x_0)$, $B(t_1, x_1)$ цэгүүд болон x^* функцийн хувьд дараах нөхцөл биелэгдэнэ.*

$$\begin{cases} F(t_0, x^*(t_0), x^{*\prime}(t_0)) + (\varphi'(t_0) - x^{*\prime}(t_0)) \dfrac{\partial F(t_0, x^*(t_0), x^{*\prime}(t_0))}{\partial x'} = 0 \\ F(t_1, x^*(t_1), x^{*\prime}(t_1)) + (\psi'(t_1) - x^{*\prime}(t_1)) \dfrac{\partial F(t_1, x^*(t_1), x^{*\prime}(t_1))}{\partial x'} = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Иймд (2.9)-(2.10) бодлогыг бодохын тулд дараах үйлдлийг гүйцэтгэнэ.

а) Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл зохиож $x = x(t, c_1, c_2)$ экстремалийг олно.

б) (2.11) системийг

$$\begin{cases} x(t_0, c_1, c_2) = \varphi(t_0) \\ x(t_1, c_1, c_2) = \psi(t_1) \end{cases} \tag{2.12}$$

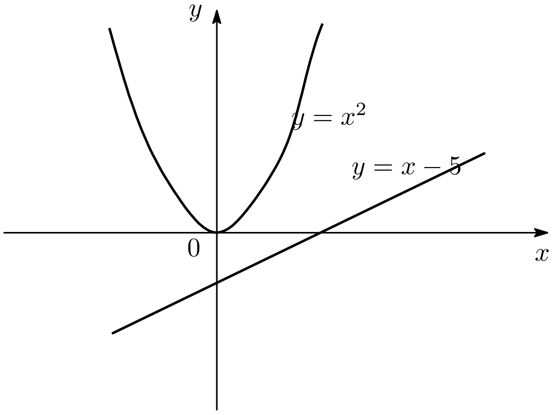
системтэй хамтруулан бодож c_1, c_2, t_0, t_1-ийг олно. Мөн тухайн тохиолдолд (2.9)-(2.10) бодлогын хувьд $A(t_0, x_0)$ нь бэхлэгдсэн бөгөөд баруун талын төгсгөл нь $x = \psi(t)$ муруйн дагуу хөдөлдөг бол (2.11) нөхцөл нь

$$\big[F + (\psi' - x')\big]\Big|_{t=t_1} = 0$$

хэлбэртэй болно.

Жишээ 12. $y = x^2$ ба $x - y = 5$ муруйнуудын хоорондох зайг ол.

Бодолт.



Бодлогын нөхцөлийг томъёолбол:

$$F = \int_E \sqrt{1 + x'^2(t)} dt \to \min$$

$E : x = x(t), \quad x_0 = t_0 - 5, \quad x_1 = t_1^2, F = F(x, x', t) = \sqrt{1 + x'^2}$ учир (I бүлэг "а" тохиолдол) ёсоор Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл

$$x(t) = c_1 t + c_2$$

хэлбэртэй болно. (2.11) нөхцөлийг бичвэл

$$\begin{cases} \sqrt{1 + c_1^2} + (1 - c_1) \cdot \dfrac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}} = 0 \\ \sqrt{1 + c_1^2} + (2t_1 - c_1) \cdot \dfrac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}} = 0 \end{cases}$$

Энэ системийг дараах хэлбэрт

$$\begin{cases} 1 + c_1^2 + c_1 - c_1^2 = 0 \\ 1 + c_1^2 + (2t_1 - c_1) = 0 \end{cases}$$

бичиж $c_1 = -1$ ба $t_1 = \dfrac{1}{2}$ гэж олно. Нөгөө талаас (2.12) нөхцлийг бичвэл:

$$\begin{cases} c_1t_0 + c_2 = x_0 = t_0 = 5 \\ c_1t_1 + c_2 = x_1 = t_1^2 \end{cases} \quad \text{буюу} \quad \begin{cases} -t_0 + c_2 = t_0 - 5 \\ -\dfrac{1}{2} + c_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Энэ системийг бодвол: $c_2 = \dfrac{3}{4}$ ба $t_0 = \dfrac{23}{8}$ болно. $A\Big(\dfrac{23}{8}; \dfrac{17}{8}\Big)$, $B\Big(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\Big)$ Энэ хоёр муруйн хамгийн ойр зай нь

$$AB = \sqrt{\Big(\frac{23}{8} - \frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{17}{8} - \frac{1}{4}\Big)^2} = \frac{19\sqrt{2}}{8}$$

VIII. Олон хэмжээст вариац тооллын бодлого.
$T = [t_0, t_1]$ хэрчим дээр $x_i(t_0) = x_i^0,\ x_i(t_1) = x_i^1,\ i = \overline{1, n}$ нөхцлийг хангасан $x_1 = x_1(t),\ \ x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ гэсэн гөлгөр функцууд өгөгдсөн гэж үзье.
$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ вектор функц зохиож

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)dt \tag{2.13}$$

функционал тодорхойльё. Үүнд $F(x, x', t)$ функц нь $(2n{+}1)$ хувьсагчийн функц ба (x, x', t) хувьсагчуудаар 2 дахин дифференциалчлагдана. Энэ бодлогын хувьд вариац тооллын (хялбар) бодлогын үндсэн үр дүн хэвээр хадгалагдана.

Теорем 8. *Хэрэв $x^* = x^*(t)$ вектор функц нь (2.13) бодлогын орчны сул минимумын цэг бол дараах (Эйлер-Лагранжийн) дифференциал тэгшитгэлийн системийг хангана.*

$$\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\right) = 0 \tag{2.14}$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1. \tag{2.15}$$

(2.14) ба (2.15) системийг задалж бичвэл:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F(x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x_i'}\right) = 0, \quad i = \overline{1, n} \\ x_i(t_0) = x_i^0 \\ x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

2.2 Заагланттай вариац тооллын бодлого

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)dt \to \min, \tag{2.16}$$

$$g_i(x) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} F_i(x, x', t)dt = c_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{2.17}$$

Үүнд $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\,, \quad x(t) \in C_n^1(T)$.
$L(\lambda_0, \lambda, x, x', t) = \lambda_0 F(x, x', t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x, x', t)$ гэсэн Лагранжийн функц зохиоё.

Теорем 9. *Хэрэв $x^* = x^*(t)$ нь (2.16)-(2.17) бодлогын шийд бол тэгээс ялгаатай вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ оршин бөгөөд*

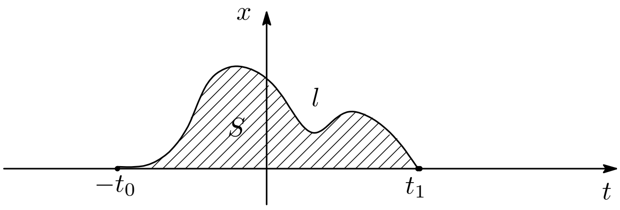
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\lambda_0, \lambda, x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L(\lambda_0, \lambda, x^*, x^{*\prime}, t)}{\partial x'}\right) = 0 \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} F_i(x^*, x^{*\prime}, t)dt = c_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x^*(t_0) = x^0, \quad x^*(t_1) = x^1 \end{cases}$$

нөхцөл биелэгдэнэ. Өөрөөр хэлбэл $x^* = x^*(t)$ функц нь

$$\begin{cases} \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\lambda_0, \lambda, x^*, x^{*\prime}, t)dt \to \min \\ x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1 \end{cases} \tag{2.18}$$

бодлогын шийд гэсэн үг юм.

Жишээ 13. $A(-t_0, 0)$ $B(t_0, 0)$ цэгүүдийг l урттай муруйгаар холбохдоо абсцисс тэнхлэг ба $x = x(t) \geq 0$ муруй хоёроор үүссэн талбай хамгийн их байхаар холбоё. Энэ бодлогын математик загвар бичвэл:



$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_{-t_0}^{t_0} x(t)dt \to \min, \\ g(x) = \int\limits_{-t_0}^{t_0} \sqrt{1 + x'^2(t)}dt = l \end{cases}$$

$l \geq 2t_0$ үед бодлого шийдтэй гэдэг нь илэрхий юм.
$x(-t_0) = x(t_0) = 0$. Лагранжийн функц зохиовол:

$$L(\lambda_0, \lambda, x, x', t) = -\lambda_0 x + \lambda\sqrt{1 + x'^2(t)}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\lambda_0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\lambda x'}{\sqrt{1 + x'^2}}$$

Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл зохиовол:

$$-\lambda_0 - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\lambda x'}{\sqrt{1 + x'^2}}\Big) = 0$$

Хэрэв $\lambda_0 = 0$ бол $x' = const \Rightarrow x(t) \equiv 0$. Энэ нь зөвхөн $l = 2t_0$ үед биелэгдэнэ. Иймд $\lambda_0 = 1$ гэж үзье. $\lambda \in R$

$$\int d\Big(\frac{\lambda x'}{\sqrt{1+x'^2}}\Big) = \int dt \Rightarrow \frac{\lambda x'}{\sqrt{1+x'^2}} = t + c_1, \quad c_1 = const$$

$$x' = \pm\frac{t-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(t-c_1)^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} == \pm\frac{t-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(t-c_1)^2}} \Rightarrow$$

$$dx = \pm\frac{t-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(t-c_1)^2}}$$

$$x - c_2 = \pm\sqrt{\lambda^2-(t-c_1)^2} \Rightarrow (x-c_2)^2 + (t-c_1)^2 = \lambda^2$$

Захын нөхцөлийг бичвэл:

$$\begin{cases} (-t_0-c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2 \\ (t_0-c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2 \\ \lambda \int\limits_{-t_0}^{t_0} \dfrac{dx}{\sqrt{\lambda^2-(t-c_1^2)}} = l \end{cases}$$

Эндээс $c_1 = 0, \quad c_2 = \lambda^2 - x^{0^2} \Rightarrow \arcsin\dfrac{t_0}{\lambda} = \dfrac{1}{2\lambda}$.

2.3 Математик программчлалын бодлого

Одоо математик программчлалын дараах ерөнхий бодлогыг авч үзье.
$f : X \to R, \quad g_j : \; X \to R, \quad j = \overline{1,s}$ функционалиуд болог.
$G : X \to Y, \quad G$-оператор ба Y-шугаман огторгуй.

$$f(x) \to \min, \tag{2.19}$$

$$D : \begin{cases} g_j(x) \le 0, \quad j = \overline{1,s} & (2.20) \\ G(x) = 0 & (2.21) \end{cases}$$

Хэрэв $Y = R^{m-s}$, $m > s$ тэгвэл оператор G нь
$G = (g_{s+1}, g_{s+2}, \dots, g_m)$ гэсэн вектор функциональ болох бөгөөд $g_j(x) = 0$, $j = \overline{s+1, m}$ хэлбэртэй болно. D боломжит олонлог.
(2.19)-(2.21) бодлогын хувьд оновчтой нөхцлийг томъёолохын тулд дифференицлчлагддаг ба хосмог операторын тухай товч ойлголт авч үзье.
$G : X \to Y$ оператор өгөгдсөн болог. X, Y банах огторгуйнууд
Тодорхойлолт 2. Хэрэв $x^0 \in X$ ба $x^0 + h \in X$ нөхцлийг хангах h-үүдийн хувьд тасралтгүй шугаман оператор $P : X \to Y$ орших бөгөөд

$$G(x^0+h) = G(x^0)+P(h)+R(x^0,h), \quad \lim_{||h||_X \to 0} \frac{||R(x^0,h)||_Y}{||h||_X} = 0$$

нөхцөл биелэгдэх бол P-операторыг G- операторын уламжлал буюу градиент гэж нэрлэнэ. Үүнийг $\nabla G(x^0)$ гэж тэмдэглэнэ. x^0 цэг дээрх градиентийн утгыг $G'(x^0)(h)$ гэж тэмдэглэнэ.
$\Phi : X \to Y$ шугаман тасралтгүй оператор болог. Мөн шугаман тасралтгүй оператор $\Phi^* : Y^* \to X^*$ тодорхойлогдсон гэж үзье. Хэрэв $< c, \Phi(x) >_Y = < \Phi^*(c), x >_X$ тэнцэтгэл нь бүх $x \in X$, $y \in Y$ -үүдийн хувьд биелэгддэг бол X^*, Y^* огторгуйнуудыг Φ-ийн хувьд харилцан хосмог гэж нэрлэнэ.
(2.19) бодлогын хувьд Лагранжийн функционалийг тодорхойлбол:
$L(x, \lambda^*, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 f(x) + \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j g_j(x) + < \lambda^*, G(x) >_Y$
Үүнд $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) \in R^{s+1}$, $\lambda^* \in Y^*$. Хэрэв тухайн тохиолдолд $Y = R^{m-s}$, $m > s$, $G = (g_{s+1}, g_{s+2}, \dots g_m)$ бол

$$< \lambda^*, G(x) >_Y = \sum_{j=s+1}^{m} \lambda_j g_j(x), \quad (\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots, \lambda_m) \in R^{m-s}.$$

Теорем 10. *X, Y-банах огторгуйнууд болог. $G : X \to Y$ оператор ба $f, g_1, \ldots, g_s$ функционалууд нь $x^0 \in D$ цэгийн орчинд тасралтгүй дифференциалчлагддаг гэж үзье. $\nabla G(x^0)$ нь x^0 цэг дээр тасралтгүй болог. $\nabla G(x^0) : X \to Y$ битүү гэж үзье. Тэгвэл $x^0 \in D$ нь (2.19)-(2.21) бодлогын шийд болох зайлшгүй нөхцөл нь тэгээс ялгаатай вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ орших ба $\exists \lambda^* \in Y^*$,*
$\lambda^* \neq 0,\ \nabla_x L(x^0, \lambda^*, \lambda_1 \ldots, \lambda_s) = \lambda_0 \nabla f(x^0) + \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j \nabla g_j(x) +$
$(\nabla G(x^0))^*(\lambda^*) = 0,\ \lambda_j g_j(x^0) = 0, \quad j = \overline{1, s}$
нөхцөл биелэгдэх явдал юм.

Хэрэв $G(x^0)(X) = Y$ ба $\exists \tilde{x} \in X : \quad \nabla G(x^0)(\tilde{x}) = 0$, $< \nabla g_j(x^0), \tilde{x} >_X < 0, \quad \forall_j : 1 \leq j \leq s : \ g_j(x^0) = 0$ бол $\lambda_0 = 1$ гэж үзэж болно. Одоо дараах бодлогыг авч үзье.

$$\begin{cases} J(x(t), u(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) \to inf, \\ x' = \varphi(t, x, u) \\ h_0(x(t_0)) = 0, \quad h_1(x(t_1)) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

$f : R \times R^n \times R^r \to R, \ \varphi : \quad R \times R^n \times R^r \to R^n$ буулгалтууд нь бүх хувьсагчуудаараа $U \subset R \times R^n \times R^r$ муж дээр тасралтгүй дифференциалчлагдана. $(t, x^*(t), u^*(t)) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1]$ $h_i : R^n \to R^{s_i}, \quad i = 0, 1$ буулгалтууд нь $x^*(t_i), \quad i = 0, 1$ цэг дээр тасралтгүй дифференциалчлагдана.

$$(x^*(t), u^*(t)) \in C_1^n([t_0, t_1]) \times C^r([t_0, t_1])$$

Лагранжийн функцийг тодорхойлъё. $F = F(t, x, x', u, p, \lambda_0)$

$F = \lambda_0 f(t, x, u) + < p, x' - \varphi(t, x, u) >,$

$L : R \times R^n \times R^n \times R^r \times R^n \times R \to R,$

$L = L(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), l_0, l_1, \lambda_0),$

$L = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x'(t), u(t), p(t), \lambda_0)dt + < l_0, h_0(x(t_0)) > +$
$< l_1, h_1(x(t_1)) >, L : C_1^n(T) \times C^r(T) \times C_1^n(T) \times R^{s_0} \times R^{s_1} \times R \to R$

Теорем 11. *$x^*(t), u^*(t)$-цэг нь (2.22) бодлогын орчны сул минимум байх зайлшгүй нөхцөл нь нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцүү биш Лагранжийн үржигдэхүүнүүд $\lambda_0 \in R,\ \lambda_0 \geq 0$, $l_i \in R^{s_i}$, $i = 0, 1$ ба функц $p(t) \in C_1^n(T)$ орших бөгөөд*
а)

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)\Big)_{(x^*(t), u^*(t))} = 0 \qquad (2.23)$$

б)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x'}(x^*(t_0), u^*(t_0)) = {h^*}'_0(x^*(t_0))l_0, \\ &\frac{\partial F}{\partial x'}(x^*(t_1), u^*(t_1)) = -{h^*}'_1(x^*(t_1))l_1 \end{aligned} \qquad (2.24)$$

в)

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x^*(t), u^*(t)) = 0 \qquad (2.25)$$

нөхцлүүд биелэх явдал юм. ■

Одоо (2.23) нөхцөлийг задалж бичвэл:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda_0 f'_x(t, x, u) - {\varphi^*}'_x(t, x, u)p,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = p(t), \qquad \Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}\Big) = p'(t),$$

$$p'(t) = \lambda_0 f'_x\big(t, x^*(t), u^*(t)\big) - {\varphi^*}'_x(t, x^*(t), u^*(t)p(t). \qquad (2.26)$$

Энэ нь n дифференциал тэгшитгэлийн систем юм. (2.24) нөхцөлийг задалж бичвэл:

$$\left.\begin{aligned} p(t_0) &= h_0'^*(x^*(t_0))l_0 \\ p(t_1) &= -h_1'^*(x^*(t_1))l_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

Одоо (2.4) нөхцөлийг бичвэл

$$\lambda_0 \frac{\partial f(t,x^*,u^*)}{\partial u} = {\varphi^*}'_u(t,x^*(t),u^*(t))p(t) \qquad (2.28)$$

Тэнцэтгэлийн заагалтай вариац тооллын бодлого бичвэл:

$$\left.\begin{array}{l} J(x)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t,x,x')dt \to \min \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f_j(t,x,x')dt = \alpha_j, \quad j=\overline{1,m} \\ h_0(x(t_0)=h_1(x(t_1))=0 \end{array}\right\} \qquad (2.29)$$

$f_i : R\times R^n \times R^n \to R, \quad i=\overline{0,m}, \quad h_i : R^n \to R^{s_i}, \quad i=0,1.$
Хэрэв $x'_i=u_i, \ i=\overline{1,n}$ ба $x'_{j+n}=f_j(t,x,u), \ j=1,\dots,m$ гэж үзвэл энэ бодлого нь өмнөх бодлого руу шилжинэ. Үүнийг задалж бичвэл:

$$\tilde{J}(x,u)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t,x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_n)dt \to \min$$

$$x'_j = u_j, \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x'_{j+n} = f_j(t,x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_n), \quad j=1,\dots m$$

$$h_i(x_1(t_i),\dots,x_n(t_i))=0, \ i=0,1, \ x_{n+j}(t_0)=0, \ x_{n+j}(t_1)=\alpha_j,$$
$$j=1,2,\dots,m$$

Теорем 12. *$x^*=x^*(t)$ вектор функц нь (2.29) бодлогын орчны сул минимум байх зайлшгүй нөхцөл нь нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцүү биш Лагранжийн үржигдэхүүнүүд $\lambda_j\in R, \ j=0,1,\dots,m$ ба $l_i\in R^{s_i}, \quad i=1,2$ орших бөгөөд*

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\Big)\right)\Big|_{x^*(t)}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x'}\Big|_{x^*(t_0)}=h'^*_0(x^*(t_0))l_0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x'}\Big|_{x^*(t_1)}=-h'^*_0(x^*(t_1))l_1 \end{array}\right.$$

нөхцөл биелэгдэх явдал юм.

Мөн дээд эрэмбийн уламжлал агуулсан вариац тооллын дараах бодлогыг

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)})dt \to \min$$

$x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1, \;\; x^{(i)}(t_0) = x_0^i, \;\; x^{(i)}(t_1) = x^i,$
$i = 0, \ldots, n-1, \;\; x' = u_1, \;\; x'' = u_2, \ldots, \;\; x^{(n)} = u_n$ гэж дээрх бодлого руу шилжүүлж оновчтой нөхцлийг бичвэл:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big) + \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\Big) - \frac{d^3}{dt^3}\Big(\frac{\partial^3 F}{\partial x'^3}\Big) + \ldots$$

$$+(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\Big(\frac{\partial^{(n)} F}{\partial x'^{(n)}}\Big) = 0$$

болно. Энэ тэгшитгэл нь $2n$ тогтмол агуулах бөгөөд үүнийг захын нөхцөл ашиглан тодорхойлно.
Одоо нормчлогдсон огторгуйд дараахь минимум олох бодлого авч үзье.

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \tag{2.30}$$

X нормчлогдсон шугаман огторгуй, $f(x)$ тасралтгүй функционал. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ шугаман огторгуйн элементүүд болог. Эдгээр элементүүдийн бүх боломжит шугаман комбинацуудын нийлбэрийг $K[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ гэж тэмдэглэе.

$$K[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n] = \{x \in X |\, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i, \; \lambda_i \in R, \; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Тодорхойлолт 3. Хэрэв эерэг тоо ε ба $x^0 \in X$ элементийн хувьд натурал тоо n ба элемент $x \in K$ орших бөгөөд $||x - x^0|| < \varepsilon$ нөхцөл биелэгдэж байвал $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ дарааллыг X огторгуйн гүйцэт дараалал гэж нэрлэнэ. (Жишээлбэл, $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ гэсэн олон гишүүнтүүдийн дараалал нь тасралтгүй функцийн огторгуйн гүйцэт дараалал юм. Учир нь аливаа тасралтгүй функцэд олон гишүүнтийн функцээр дөхөж болдог.)

Теорем 13. *x^0 нь (2.30) бодлогын шийд буюу глобаль минимумын цэг болог. $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ дарааллын хувьд дараах нөхцөлүүд биелдэг гэж үзье.*

1. *$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ нь X огторгуйн гүйцэд дараалал*
2. *Дурын n дугаарын хувьд $x \in X$ элемент орших бөгөөд*

$$f(x_n) = \min_{x \in K[\varphi_1, \dots, \varphi_n]} f(x)$$

Тэгвэл $\{x_n\}$ дараалал нь (2.30) бодлогын багасгагч дараалал болно. Өөрөөр хэлбэл

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x^0).$$

Баталгаа. Дурын бага эерэг тоо ε-г авъя. $f(x)$ функционал тасралтгүй учраас зерэг тоо δ орших бөгөөд
$f(x) - f(x^0) < \varepsilon, \quad x \in O(x^0, \delta) = \{x \in X \Big| ||x - x^0|| < \delta\}$ биелнэ. $\{\varphi_k\}$ дараалал гүйцэт учраас δ тооны хувьд натурал тоо n ба элемент $x \in K[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ орших бөгөөд $||x - x^0|| < \delta$. Эндээс $x \in O(x^0, \delta)$. Иймд $f(x) - f(x^0) < \varepsilon$, $x \in K[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$.
Нөгөө талаар, $f(x_n) = \min\limits_{x \in K[\varphi_1, \dots, \varphi_n]} f(x)$ буюу $f(x_n) \leq f(x)$ тул $f(x_n) - f(x^0) \leq f(x) - f(x^0) < \varepsilon$ болно. n ихсэх тутам $K[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ улам өргөжих бөгөөд $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$ буюу $n \to \infty$ үед $f(x_{n+1}) - f(x^0) \leq f(x_n) - f(x^0) < \varepsilon$ байна.
Нөгөө талаар $\exists N = N(\varepsilon) : \; f(x_n) - f(x^0) < \varepsilon, \quad \forall n > N$ тул

теорем батлагдав. ■

$\{f(x_n)\}$ дарааллыг Ритцийн дараалал гэж нэрлэнэ. Практик дээр (2.30) бодлогыг бодохдоо $\{\varphi_k\}$ дарааллыг сонгох бөгөөд $n = 1, \quad n = 2$ гэх мэт утгуудад бодож $x_1, x_2, \ldots$-ыг олно. k-ийн тодорхой утганд олсон $f(x_k)$ бодлогын ойролцоо шийд болно.

Бүлэг 3

Төгсгөлгүй завсар дээрх вариац тооллын бодлого

Эдийн засагт пүүсийн ашиг, хэрэглэгчийн ханамж, нийгмийн баялгийг хугацааны хязгааргүй завсарт авч үзэх шаардлага гардаг. Энэ нь төгсгөлгүй завсар дээрх вариац тооллын бодого руу шилждэг.Зорилгын функциональ

$$J(x) = \int\limits_0^\infty F(x, x', t)dt$$

хэлбэртэй байна. $\int\limits_0^\infty F(x, x', t)dt$ интеграл нь өргөтгөсөн интеграл учраас энэ интегралын төгсгөлөг байх буюу нийлэлтийн асуудлыг авч үзэх нь чухал юм. хэрэв $J(x)$ функциональ нь $\int\limits_0^\infty F(x, x', t)e^{-\rho t}dt$ хэлбэртэй бөгөөд $F(x, x', t)$ функц нь зааглагдсан бол энэ интеграл нийлнэ.

Үүнд ρ нь өгөгдсөн тогтмол

$$\int_0^\infty F(x, x', t)e^{-\rho t}dt \leq \int_0^\infty Me^{-\rho t}dt = \frac{M}{\rho} \tag{3.1}$$

Цаашид эдийн засгийн вариац тооллын бодлогуудад $J(x)$ интегралыг үргэлж нийлдэг гэж үзнэ. Түүнчлэн $t \to \infty$ үед $F \to 0$ биелнэ.

$$J(x) = \int_0^\infty F(x, x', t)dt \to \min \tag{3.2}$$

$$x(t_0) = x^0 \tag{3.3}$$

бодлого нь төгсгөлгүй завсар дээрх вариац тооллын бодлого бөгөөд энэ бодлогын хувьд Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл мөн ижилхэн бичигдэх ба нэмэлт захын нөхцөл нь өөр байна. Үүний тулд бэхлэгдээгүй төгсгөлтэй вариац тооллын бодлогын нэмэлт нөхцлийг ашиглавал:

$$[F - x'F'_{x'}]_{t\to\infty}\Delta T + [F'_{x'}]_{t\to\infty}\Delta x_T = 0 \tag{3.4}$$

T бэхлэгдээгүй тул (3.4) нөхцөл нь

$$\lim_{t\to\infty}\left[F - x'\frac{\partial F}{\partial x'}\right] = 0 \tag{3.5}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\partial F}{\partial x'}\right] = 0 \tag{3.6}$$

үед биелэгдэнэ.

Хэрэв $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \bar{x} = \text{const}$ бол $\Delta x_T = 0$ болох ба (3.6) нөхцлийг ашиглах шаардлагагүй юм.
Харин бэхлэгдээгүй төгсгөлийн цэгтэй үед (3.5), (3.6) нөхцлүүдийг ашиглах нь тохиромжтой.

Жишээ 14. (Пүүсийн оновчтой хөрөнгө оруулалт)
Пүүсийн үйлдвэрлэлийн функц $Q = Q(K, L)$ болог.

Үүнд $\dfrac{\partial Q}{\partial K} > 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial L} > 0$, $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$, $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$

Хугацааны t агшинд пүүсийн ашиг $F(K, L) = pQ(K, L) - WL - m(K' + \delta K)$ болно.
Үүнд p-бүтээгдэхүүний үнэ, W-цалин, K-капитал, L-хөдөлмөр, δ-капиталын элэгдэл, $K' = \dfrac{dK}{dt}$ хөрөнгө оруулалт, m-тоног төхөөрөмжийн үнэ.
Дискоинтийн хүчин зүйл $e^{-\rho t}$-г тооцож, пүүсийн хязгааргүй хугацаанаас олох ашгийг тооцвол:

$$J(K, L) = \int\limits_0^\infty \left[\rho Q(K, L) - WL - m(k' + \delta K)\right] e^{-\rho t} dt$$

K ба L-г $J(K, L) \to \max$ нөхцөлөөс олох ёстой.
Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл зохиовол

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial K} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dF}{\partial K'}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial L} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dF}{\partial L'}\right) = 0 \end{cases}$$

Тухайн уламжлалуудыг олбол:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \left(p\frac{dQ}{\partial K} - m\delta\right) e^{-\rho t}, \qquad \frac{\partial F}{\partial K'} = -me^{-\rho t},$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \left(p\frac{\partial Q}{\partial L} - W\right) e^{-\rho t}, \qquad \frac{\partial F}{\partial L'} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial K} = \dfrac{m(\delta + \rho)}{p} \\ \dfrac{\partial F}{\partial L} = \dfrac{W}{p}, \qquad t \geq 0 \end{cases}$$

Хэрэв үйлдвэрлэлийн функц Коб-Дугласын функц, өөрөөр хэлбэл, $QW = K^{\alpha}L^{\beta}, \quad (\alpha + \beta \neq 1)$ бол оновчтой k^* нь

$$K^* = \left[\frac{\delta + \rho)}{\alpha p}\right]^{\frac{(\beta-1)}{(1-\alpha-\beta)}} \left(\frac{W}{\rho p}\right)^{-\frac{\beta}{(1-\alpha-\beta)}} = const.$$

$K^* = const$ нөхцөл нь зайлшгүй нөхцөл бөгөөд бодлогын анхны нөхцөл $K(0) = K_0 = K^*$ байх нь бодлогыг шийдэх зайлшгүй нөхцөл юм.

Жишээ 15. (Эйзнер-Штроцын загвар) Пүүсийн орлогын $\pi(K)$ нь капиталаас хамаарсан функц болог. Зардлын функц нь капиталын өсөлтөөс хамаарсан $C(K')$ функц байна. Хугацааны t агшин дахь пүүсийн цэвэр ашиг

$$F(K) = \pi(K) - C(K').$$

Хязгааргүй хугацаанд пүүсийнцэвэр ашгийг максимумчлах бодлогыг томъёолбол

$$J(K) = \int_0^{\infty} [\pi(K) - C(K')]e^{-\rho t}dt \to \max,$$

$K(0) = K_0$ (K_0-өгөгдсөн)
Одоо $\pi(K) = \alpha K - \beta K^2 \quad (\alpha, \beta > 0)$,
$C = aK'^2 + bK' \quad (a, b > 0)$ үед бодолтыг гүйцэтгэвэл

$$F = (\alpha K - \beta K^2 - aK'^2 - bK')E^{-rhot},$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = (\alpha - 2\beta K)e^{-\rho t}, \quad \frac{\partial F}{\partial K'} = -(2aK' + b)e^{-\rho t},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K'^2} = -2ae^{-\rho t}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial K'} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = -2\beta e^{-\rho t}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial K'} = \rho(2aK' + b)e^{-\rho t}.$$

Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл зохиовол

$$K'' - \rho K' - \frac{\beta}{a}K = \frac{b\rho - \alpha}{2a}$$

болох бөгөөд ерөнхий шийд нь

$$K^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{K},$$

үүнд $r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + \frac{4\beta}{a}}\right)$,

$\bar{k} = \frac{\alpha - b\rho}{2\beta}$. $r_1 > \rho > 0, \quad r_2 < 0$

илэрхий ба эдийн засгийн утгаас $\bar{K} > 0$ буюу $\alpha > b\rho$ гэж мөрдөн гарна.

A_1, A_2-тогтмолуудыг олохын тулд анхны нөхцөл $K(0) = K_0$ ба (3.5)-(3.6) захын нэмэлт нөхцлүүдийг ашиглана.

$$A_1 + A_2 + \bar{K} = K_0 \tag{3.7}$$

$$F - K'\frac{\partial F}{\partial K'} = (\alpha k - \beta K^2 + aK'^2)e^{-\rho t} \tag{3.8}$$

$K^* = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{k}, \quad K'^* = A_1 r_1 e^{r_1 t} + A_2 r_2 e^{r_2 t}$ тул эдгээрийг (3.8)-д орлуулбал

$$\begin{aligned}F^* - K^{*\prime}\frac{\partial F}{\partial k''} &= A_1(\alpha - 2\beta\bar{K})e^{(r_1-\rho)t} + A_1(ar_1^2 - \beta)e^{(2r_1-\rho)t} + \\ &+ A_1A_2(2ar_1r_2 - 2\beta)e^{r_1r_2-\rho)t} + A_2(\alpha - 2\beta\bar{K})e^{(r_2-\rho)t} + \\ &+ A_2^2(ar_2^2 - \beta)e^{(2r_2-\rho)t} + (\alpha\bar{K} - \beta\bar{K}^2)e^{-\rho t}\end{aligned} \tag{3.9}$$

Нөгөө талаас (3.6) нөхцлийг бичвэл

$$\frac{\partial F}{\partial K^{*\prime}} = -(2aK^{*\prime} + b)e^{-\rho t} = -\Big(2aA_1r_1e^{r_1 t} + 2ar_2A_2e^{r_2 t} + b)\Big)e^{-\rho t},$$

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\partial F}{\partial K^{*\prime}} = 0$ болох ба $r_1 > 0, \quad r_2 < 0$ тул $A_1 = 0$ үед энэ нөхцөл биелнэ.

Энэ үед (3.5) нөхцөл $\lim\limits_{t\to\infty} \left(F^* - K^{*\prime} \dfrac{\partial F}{\partial K^{*\prime}} \right) = 0$ шууд биелэх нь илэрхий юм. (3.7) нөхцөлөөс A_2-ийг олбол $A_2 = K_0 - \bar{K}$. тэгвэл пүүсийн цэвэр ашгийг хамгийн их байлгах оновчтой капиталын хэмжээг олбол:

$$K^*(t) = (K_0 - \bar{K}) r_2 e^{r_2 t}$$

Мөн оновчтой хөрөнгө оруулалтын хэмжээг

$$I^*(t) = K^{*\prime} = -r_2[\bar{K} - K^*(t)]$$

гэж тодорхойлно.

Жишээ 16. (Рамсейн загвар)Үндэсний нийт бүтээгдэхүүн Q нь капитал K, хөдөлмөр L-ээс хамаарсан функц болог. $Q = Q(K, L)$ Нийт бүтээгдэхүүний нэг хэсгийг (C)-г хэрэглэх ба үлдсэн хэсгийг хадгаламж (S) болгон хөрөнгө оруулалтад зориулна.

Тэгвэл $Q = C + S = C + K'$ эсвэл $C = Q(K, L) - K'$. Хэрэглээнээс авах нийгмийн ханамж нь $U(C)$ функцээр тодорхойлогдоно. Ханамжийн функц $V(C)$-ийн хувьд дараах нөхцөл биелэгдэнэ.

$$\frac{\partial U(C)}{\partial C} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 U(C)}{\partial C^2} \leq 0.$$

Хөдөлмөрөөс хамаарсан ханамжийн функцийг $D(L)$-ээр тэмдэглэвэл нийгмийн цэвэр ханамжийг хугацааны t агшинд $U(C) - D(L)$ гэж тодорхойлно. Бүх хугацааны турш нийгмийн цэвэр ханамжийг хамгийн их байлгах бодлогыг томъёолбол:

$$\int_0^\infty [U(C) - D(L)]dt \to \max \tag{3.10}$$

Энэхүү бодлого нь төгсгөлгүй завсар дээрх вариац тооллын бодлого учраас захын нэмэлт нөхцөл (3.5) ба (3.6) үргэлж биелэгдэх албагүй юм. Энэ хүндрэлээс гарах аргыг дараах замаар шийдвэрлэж болно.

$$J(C) = \int_0^\infty [B - U(C) + D(L)]dt \to \min, \tag{3.11}$$

$$K(0) = K_0 \qquad (K_0 \text{ өгөгдсөн}),$$

Үүнд $F(K,L){=}B - U(C){+}D(L)$, B нь хугацааны дурын агшинд нийгмийн цэвэр ханамжийн хүрч болох дээд хязгаар. $t \to \infty$ үед $F(K,L) \to 0$ байна. Одоо $J(C)$ интегралыг нийлдэг гэж үзээд бодолтыг гүйцэтгэе. $C{=}Q(K,L) - K'$ тул

$$\frac{\partial F}{\partial L} = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial L} + D'(L) \equiv -\mu\frac{\partial Q}{\partial L} + D'(L), \quad [\mu \equiv U'(C)]$$
$$\frac{\partial F}{\partial L'} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial K} = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial K} = -\mu\frac{\partial Q}{\partial K}$$
$$\frac{\partial F}{\partial K'} = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial K'} = -U'(C)(-1) = U'(C) = \mu$$

Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл L-хувьсагчдын хувьд

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 0 \text{ буюу } D'(l) = \mu Q'_L, \quad t \geq 0$$

Энэхүү тэгшитгэл нь L-ийн хувьд алгебрийн тэгшитгэл учраас анхны $L(0) = L_0$ нөхцлийг оруулах нь тохиромжгүй K хувьсагчийн хувьд

$$-\mu\frac{\partial Q}{\partial K} - \frac{d\mu}{dt} = 0 \text{ буюу } \frac{\left(\frac{d\mu}{dt}\right)}{\mu} = -\frac{\partial Q}{\partial K}, \quad t \geq 0$$

Нөгөө талаас $F(K,L)$ нь t-г агуулаагүй тул өмнө үзсэн ёсоор

Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл нь $F - K'F'_{K'} \equiv const$ хэлбэртэй байна. Үүнийг задалж бичвэл:

$$B - U(C) + D(L) - K'\mu = const, \quad t \geq 0$$

Бодлогын $\lim\limits_{t\to\infty} F(K, L) = 0$ нөхцлийг ашиглавал $\lim\limits_{t\to\infty} \mu(t) = 0$ гэдгийг шалгаж болно. Иймд $const \equiv 0$ болох ба оновчтой капиталын хэмжээ

$$K^{*\prime} = \frac{B - U(C) + D(L)}{\mu}$$

эсвэл

$$K^{*\prime}(t) = \frac{B - U[C(t)] + D[L(t)]}{C'(t)} \tag{3.12}$$

хэлбэртэй болно.

Энэхүү дифференциал тэгшитгэлийг $K(0) = K_0$ анхны нөхцөлтэй хамтруулан бодож K^*-г бүрэн тодорхойлно.

(3.12) томъёог Рамсейн дүрэм гэж нэрлэнэ.

Энэ нь хугацааны t агшин дахь капиталын өөрчлөлтийн хэмжээ нь, одоо ба ирээдүйд хүрч болох ханамжийн зөрүүг ахиу ханамжид харьцуулсан харьцаатай тэнцүү үед хамгийн оновчтой капитал хуримтлал бий болдог гэдгийг тодорхойлно. Энэ бодлогын хувьд (3.5) ба (3.6) нөхцлүүд нь хоёр хувьсагчтай тохиолдолд биелнэ гэдгийг хялбархан шалгаж болно. Үүнийг шалгавал:

$$\lim_{t\to\infty} (F - L'F'_{L'}) = 0$$

ба

$$\lim_{t\to\infty} (F - K'F'_{K'}) = 0$$

биелнэ учир нь $F'_{L'} = 0$. Иймд энэ нөхцөл нь бодлогын $\lim\limits_{t\to\infty} F = 0$ нөхцөлтэй давхцаж байна. Нөгөө талаас

$$\lim_{t\to\infty} F'_{L'} = \lim_{t\to\infty} F'_{K'} = 0$$

нөхцөл шууд биелнэ.

Бүлэг 4

Вариац тооллын тооцон бодох арга

Одоо вариац тооллын бодлогуудыг ойролцоо бодох аргуудтай танилцъя.

4.1 Эйлерийн ялгаварт схемийн арга

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')dt \to \min, \tag{4.1}$$

$$x(t_0) = x^0 \quad x(t_1) = x^1.$$

Эйлерийн аргад $J(x)$ функционалийн утгыг тахир шугамын цэгүүд дээр авч үзэх замаар математик программчлалын бодлого руу шилжүүлж бодно. $[t_0, t_1]$ завсрыг
$t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_0 + (n-1)\Delta t, \quad \Delta t = \dfrac{(t_1 - t_0)}{n}$
цэгүүдээр хуваана. Тахир шугамын оройн цэгүүд нь
$n(t_0 + \Delta t, x_1), \quad (t_0 + 2\Delta t, x_2) \dots, (t_0 + (n-1)\Delta t, x_{n-1})$ бо-

лог. Тэгвэл $J(x)$ функционал нь $\bar{J}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ функц рүү шилжинэ.
$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ функцийг минимум утгатай байх нөхцлөөс тодорхойлдог. Өөрөөр хэлбэл,

$$\bar{J}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \to \min$$

бодлогыг бодно гэсэн үг. Энэ бодлогын зайлшгүй нөхцөлийг бичвэл:

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_2} = 0, \dots \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_{n-1}} = 0. \tag{4.2}$$

Жишээ 17. $J(x) = \int\limits_0^1 (x'^2 + 2x)dt \to \min$, $x(0) = x(1) = 0$ бодлогыг ойролцоогоор бодъё.
Бодолт. $\Delta t = \dfrac{1-0}{5} = 0.2$, $x_0 = x(0) = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = x(1) = 0$
Функцийн уламжлалыг ойролцоогоор бодвол:
$x'_k = x'(t_k) \approx \dfrac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}$ буюу $x'(0) = \dfrac{x_1 - 0}{0.2}$,
$x'(0.2) = \dfrac{x_2 - x_1}{0.2}$, $x'(0.4) = \dfrac{x_3 - x_2}{0.2}$, $x'(0.6) = \dfrac{x_4 - x_3}{0.2}$,
$x'(0.8) = \dfrac{x_5 - x_4}{0.2}$.
Одоо интегралыг ойролцоогоор тэгш өнцөгтийн томъёогоор бодвол:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \Big(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})\Big)\Delta x,$$

$\bar{J}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big[\Big(\dfrac{x_1}{0.2}\Big)^2 + \Big(\dfrac{x_2 - x_1}{0.2}\Big)^2 + 2x_1 + \Big(\dfrac{x_3 - x_2}{0.2}\Big)^2 + 2x_2 + \Big(\dfrac{x_4 - x_3}{0.2}\Big)^2 + 2x_3 + \Big(\dfrac{0 - x_4}{0.2}\Big)^2 + 2x_4\Big]0.2 \to \min$
Эндээс $\dfrac{1}{0.2}\dfrac{\partial \bar{J}}{\partial x_1} = 2\dfrac{x_1}{0.04} - \dfrac{x_2 - x_1}{0.02} + 2 = 0$,

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_2} = 2\frac{x_2 - x_1}{0.04} - \frac{x_3 - x_2}{0.02} + 2 = 0,$$

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_3} = 2\frac{x_3 - x_2}{0.04} - \frac{x_4 - x_3}{0.02} + 2 = 0$$

$\frac{1}{0.2}\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_2} = 2\frac{x_4 - x_3}{0.04} - \frac{x_4}{0.02} + 2 = 0$ болох ба

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -0.04 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -0.04 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = -0.04 \\ -x_3 + 2x_4 = -0.04 \end{cases}$$

системийн шийдийг олбол $x_1 = -0.08, \quad x_2 = -0.12,$ $x_3 = -0.12,\ x_4 = -0.08$. Энэ бодлогын жинхэнэ шийдийг олбол $x(t) = \dfrac{t^2 - t}{2}$ болох ба хэрчмийн хуваалтын цэгүүд дээрх утгуудтай давхцана.

Ерөнхий тохиолдолд дараах бодлогыг бодно гэсэн үг.

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} F\Big(t, x_k, \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}\Big)\Delta t \to \min$$

4.2 Ритцийн арга

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')dt \to \min,$$
$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1$$

$\{\varphi_i(t)\}$ функцийн систем нь $C^1(T)$ огторгуйд гүйцэд дараалал болог. $x_n(t) = \varphi_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t)$ функц зохиоё.

$\varphi_0(t_0) = x^0, \quad \varphi_0(t_1) = x^1, \quad \varphi_i(t_0) = \varphi_i(t_1) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

$c_1, c_2, \ldots c_n$-г олохдоо дараах бодлогыг бодно.

$$J(x_n(t)) = \bar{J}(c_1, c_2, \dots, c_n) \to \min .$$

Энэ нөхцөлт биш экстремумын бодлогын зайлшгүй нөхцөлийг бичвэл:

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_n^*(t) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i^* \varphi_i(t).$$

n-ийн хүрэлцээтэй их үед $x_n^*(t)$ дараалал нь Теорем 13 ёсоор бодлогын шийд уруу нийлнэ.

Жишээ 18.

$$\int_0^1 (x'^2 + x^2 + 2xt)dt \to \min,$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

$\varphi_0(t) = 0,\ \varphi_1(t) = t^2 - t,\ \varphi_2(t) = t^3 - t^2, \dots,\ \varphi_n(t) = t^{n+1} - t^n$

$n = 2$ үед

$x_2(t) = c_1(t^2 - t) + c_2(t^3 - t^2)$, $x_2'(t) = c_1(2t - 1) + c_2(3t^2 - 2t)$

$$J(x_2(t)) = \bar{J}(c_1, c_2) = \frac{11}{30}c_1^2 + \frac{11}{30}c_1c_2 + \frac{1}{7}c_2^2 - \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{10}c_2,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{J}}{\partial c_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{J}}{\partial c_2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{11}{15}c_1 + \dfrac{11}{30}c_2 = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{11}{30}c_1 + \dfrac{2}{7}c_2 = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{69}{473}, \quad c_2 = \frac{7}{43}, \quad x_2(t) = \frac{77t^3 - 8t^2 - 69t}{473}.$$

Иймд бодлогын экстремаль нь $x^* \approx x_2(t)$ байна.

Бүлэг 5

Вариац тооллын эдийн засгийн хэрэглээ

5.1 Пүүсийн ашиг максимумчлах

Ганц бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэдэг монопол пүүсийн зардлын функц

$$C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0) \tag{5.1}$$

болог. Пүүсийн гарц болох бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ Q нь эрэлтин тоо хэмжээтэй тэнцүү байна. Эрэлтийн хэмжээ нь хугацааны t агшинд үнэ p(t)-ээс хамаарахаас гадна үнийн өсөлт $p'(t)$-ээс хамаарна гэж үзье.

$$Q = a - bp(t) + hp'(t), \quad (a, b > 0, \quad h \neq 0) \tag{5.2}$$

Пүүсийн ашгийг тодорхойлбол:

$$\pi = pQ - C = p(a - bp + hp') - \alpha(a - bp + hp')^2 - \beta(a - bp + bp') - \gamma$$

Энэ илэрхийллийг эмхэтгэн бичвэл:

$$\begin{aligned} \pi(p, p') =& -b(1 + \alpha b)p^2 + (a + 2\alpha ab + \beta b)p - \alpha h^2 p'^2 - \\ & - h(2\alpha a + \beta)p' + h(1 + 2\alpha b)pp' - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Пүүсийн гол зорилго нь пүүсийн нийт ашгийг $[0, T]$ хугацаанд хамгийн их байлгах оновчтой үнэ $p(t)$-г олоход оршино. Өөрөөр хэлбэл дараах вариац тооллын бодлогыг бодно гэсэн үг юм.

$$J(p) = \int_0^T \pi(p, p')dt \tag{5.4}$$

$$p(0) = p_0, \quad p(T) = p_1,$$

үүнд p_0, T, p_1 өгөгдсөн.

$$\pi'_p = \frac{\partial \pi}{\partial p} = -2b(1+\alpha b)p + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1+2\alpha b)p'$$
$$\pi'_{p'} = \frac{\partial \pi}{\partial p'} = -2\alpha h^2 p' - h(2\alpha a + \beta) + h(1+2\alpha b)p$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial p'^2} = -2\alpha h^2, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial p \partial p'} = h(1+2\alpha b)$$

$\pi'_{tp'} = \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial t \partial p'} = 0$ тул Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл

$$p'' - \frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2} p = -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2}$$

хэлбэртэй байна. Энэхүү 2-р эрэмбийн шугаман дифференциал тэгшитгэлийг бодвол ерөнхий шийд

$$p^*(t) = A_1 e^{rt} + A_2 e^{-rt} + \bar{p}$$

болох захын нөхцлүүдийг ашиглан A_1 ба A_2-г олно.

$$A_1 = \frac{p_0 - \bar{p} - (p_1 - \bar{p})e^{Tr}}{1 - e^{2Tr}}, \quad A_2 = \frac{p_0 - \bar{p} - (p_1 - \bar{p})e^{-Tr}}{1 - e^{-2Tr}},$$

$$\bar{p} = \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1+\alpha b)}$$

Нөгөө талаас (5.4) бодлогын хувьд Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл шууд

$$\pi - p' \frac{\partial \pi}{\partial p'} = c \tag{5.5}$$

Үүнийг дараах хэлбэрт бичвэл:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p'} \cdot \frac{p'}{\pi} = \varepsilon_{p'} \equiv 1 - \frac{c}{\pi}$$

$\varepsilon_{p'}$ нь π функцийн үнийн өөрчлөлтийн хувь дахь мэдрэмжийг харуулж байна.
Иймд энэ мэдрэмжийг $1 - \dfrac{c}{\pi}$-тэй тэнцүү байлгахаар авбал пүүсийн $[0, T]$ завсар дахь ашиг хамгийн их байна.

5.2 Инфляц ба ажилгүйдэл

y_t-t хугацаан дахь үндэсний орлого
y_f-бүрэн ажилтай үеийн үндэсний орлого
λ- нийгмийн алдагдлын функц болог.

$$\lambda = (y_f - y)^2 + \alpha m^2 \quad (\alpha > 0) \tag{5.6}$$

Филипсийн муруйн тусламжтайгаар $(y_f - y)$ ба p-ийн хамаарлыг дараах тэгшитгэл өгнө.

$$m = -\beta(y_f - y) + u, \quad (\beta > 0)$$

Үүнд u- нь хүлээгдэж буй инфляц, m-нь инфляцийн бодит түвшин
Инфляцийн өөрчлөлтийн тэгшитгэлийг бичвэл:

$$u' = \frac{du}{dt} = j(m - u), \quad 0 < j \leq 1$$

Хэрэв бодит инфляцийн түвшин m нь хүлээгдэж буй түвшнээс их бол $u' > 0$ болох эсрэг тохиолдолд $u' < 0$ болно.

Сүүлийн 2 тэгшитгэлийг нэгтгэн бичвэл: $u' = -\beta j(y_f - y)$ буюу $y_f - y = -\dfrac{u'}{\beta_j}$ болох ба $m = \dfrac{u'}{j} + u$ болно. Тэгвэл нийгмийн алдагдлын функц

$$\lambda(u, u') = \left(\frac{u'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{u'}{j} + u\right)^2$$

хэлбэртэй байна. Одоо нийгмийн нийт алдагдлын функц $[0, T]$ хугацааны завсарт хамгийн бага байхаар инфляцийн хүлээгдэж буй оновчтой түвшинг олох бодлого авч үзье. үүнийг томъёолбол:

$$J(u) = \int\limits_0^T \lambda(u, u')e^{-\rho t}dt \to \min, \quad u(0) = u_0, \quad u(T) = 0$$

Үүнд $u(0) = u_0$, T-өгөгдсөн, ρ-дискоинтийн коэффициент. Тухайн уламжлалуудыг олж, Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл зохиоё.

$$F(u, u') = \lambda(u, u')e^{-\rho t}$$

гэж үзье.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial u} = 2\left(\frac{\alpha}{j}u' + \alpha u\right)e^{-\rho t}\\
&\frac{\partial F}{\partial u'} = 2\left(\frac{1 + \alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}u' + \frac{\alpha}{j}u\right)e^{-\rho t}\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} = 2\left(\frac{1 + \alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t}\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial u'^2} = -2\rho\left(\frac{1 + \alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}u' + \frac{\alpha}{j}u\right)e^{-\rho t}\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'} = \frac{2\alpha}{j}e^{-\rho t}
\end{aligned}$$

$u'' - \rho u' - Mu = 0$
үүнд $M = \dfrac{\alpha\beta^2 j(\rho + j)}{1 + \alpha\beta^2} > 0$
Тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь $u^*(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$, $k_{1,2} = \dfrac{1}{2}(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4M}), \quad k_1 > 0, \quad k_2 < 0.$
Дурын тогтмол A_1 ба A_2-г захын нөхцлүүдээс олбол

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = U_0 \\ A_1 e^{k_1 T} + A_2 e^{k_2 T} = 0 \end{cases}$$

$$A_1^* = -\frac{u_0 e^{k_2 T}}{e^{k_1 T} - e^{k_2 T}}, \qquad A_2^* = \frac{U_0 e^{k_1 T}}{e^{k_1 T} - e^{k_2 T}}$$

бодлогын шийд нь $u^*(t) = A_1^* e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$

5.3 Хөдөлмөрийн эрэлтийг оновчлох бодлого

Пүүс нь $t = 0$ агшинд цалингийн хорогдолтой тулгарч ажиллах хүчийг L_0 түвшнээс L_T түвшинд хүргэх зорилготой гэж үзье.
Пүүсийн ашгийн функц нь $\pi(L)$ функцээр илэрхийлэгдэх ба $\pi''(L) < 0$ нөхцлийг хангадаг гэж үзье.
Зардлын функц

$$C(L') = bL'^2 + K, \quad (b > 0, \quad K > 0, \quad L' \neq 0)$$

болог. Цэвэр ашиг нь $\pi(L) - C(L')$ байна. Пүүс нь хөдөлмөрийн нөөцийг өөрчлөхдөө тодорхой хугацааны турш пүүсийн цэвэр ашиг төдийгүй мөн түүний тодорхой бус T хугацаанд олох одоогийн ашгийг хамгийн их байлгах явдал юм. T хугацаан дахь пүүсийн ашиг $\pi(L_T)$ бол түүний одоогийн ашиг $\pi(L_T)e^{-\rho t}$ юм. Үүнд нь ρ бууруулагч коэффициент.

Одоогийн үнийн капиталчлгдсан үнэ нь $\pi(L_T)\dfrac{e^{-\rho T}}{\rho}$ байна. Иймд дараах бодлогыг томъёолж болно.

$$J(L)=\int\limits_0^T\left[\pi(L)-bL'^2-K\right]e^{-\rho t}dt+\frac{1}{\rho}\pi(L_t)e^{-\rho T}\to\max,$$

$L(0)=L_0$ (L_0-өгөдсөн)
$L(T)=L_T$ ($L_T>L_0$ өгөгдөөгүй, T өгөгдөөгүй)
Энэ бодлогыг бодож оновчтой T^* ба $L^*=L(T^*)$-г олно. Бодлогыг вариац тооллын бодлого руу шилжүүлэхийн тулд дараах хувиргалт ашиглая.

$$z(T)=\int\limits_0^T z'(t)dt+z(0) \tag{5.7}$$

Хэрэв $z(t)$ функцийг

$$z(t)=\frac{1}{\rho}\pi(L)e^{-\rho t}$$

гэж тодорхойлбол

$$z'(t)=[-\pi(L)+\frac{1}{\rho}\pi'(L)L']e^{-\rho t}$$

болно. Тэгвэл

$$\frac{1}{\rho}\pi(L_T)e^{-\rho T}=\int\limits_0^T\left[-\pi(L)+\frac{1}{\rho}\pi'(L)L'\right]e^{-\rho t}dt+\frac{1}{\rho}\pi(L_0)$$

болох ба $J(L)$ функционалыг дараах хэлбэрт бичиж болно.

$$J(L)=\int\limits_0^T\left[-bL'^2-K+\frac{1}{\rho}\pi'(L)L'\right]e^{-\rho t}dt+\frac{1}{\rho}\pi(L_0)$$

Сүүлийн нэмэгдэхүүн $\frac{1}{\rho}\pi(L_0)$ тогтмол учраас L, T-ийн оновчтой сонголтонд нөлөөлөхгүй. Иймд

$$J(L) = \int_0^T F(L, L', t)dt = \int_0^T [-bL'^2 - K + \frac{1}{\rho}\pi'(L)L']e^{-\rho t}dt \to \max,$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = F'_L = \frac{1}{\rho}\pi''(L)L'e^{-\rho t}, \quad \frac{\partial F}{\partial L'} = [-2bL' + \frac{1}{\rho}\pi'(L)]e^{-\rho t}$$

болох ба Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл нь

$$L'' - \rho L' + \frac{\pi'(L)}{2b} = 0 \tag{5.8}$$

болно. Энэ тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь c_1, c_2 тогтмлолуудыг агуулна. Өөрөөр хэлбэл, $L^* = L^*(t, c_1, c_2)$. Нөгөө талаас $t_0 = 0$ бэхлэгдсэн ба T, L_T бэхлэгдээгүй тул харгалзах нэмэлт захын нөхцлүүд нь $\left.\frac{\partial F}{\partial L'}\right|_{t=T} = 0$ буюу

$$L' - \frac{\pi'(L)}{2\rho b} = 0, \quad t = T \text{ үед} \tag{5.9}$$

$\left[F - L'\frac{\partial F}{\partial L'}\right]_{t=T} = 0$ буюу

$$L'^2 = \frac{K}{b} \quad \text{эсвэл} \quad L' = \sqrt{\frac{K}{b}}, \quad t = T \quad \text{үед} \tag{5.10}$$

байна. Оновчтой T^* ба L_{T^*}-г дараах систем тэгшитгэлийг бодож олно.

$$\begin{cases} L^*(0, c_1, c_2) = L_0 \\ L^{*\prime}(T) - \dfrac{\pi'(L^*)}{2\rho b} = 0 \\ L^{*\prime}(T) = \sqrt{\dfrac{K}{b}} \end{cases} \tag{5.11}$$

Одоо дээрх бодлогыг $\pi(L) = 2mL - nL^2 \quad (0 < n < m)$ үед бодъёо. $\pi'(L) = 2m - 2nL$ тул Эйлер-Лагранжийн тэгшитгэл

$$L'' - \rho L' + \frac{m - nL}{b} = 0$$

хэлбэртэй болно. Тэгшитгэлийн ерөнхий шийдийг олбол

$$L = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + \bar{L}, \tag{5.12}$$

үүнд $\bar{L} = \dfrac{m}{n}, \quad k_{1,2} = \dfrac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + \frac{4n}{b}}}{2}$
(5.9) нөхцөл дараах хэлбэртэй болно.

$$(\rho b(c_1 k_1 e^{k_1 T} + c_2 k_2 e^{k_2 T} + n(c_1 e^{k_1 T} + c_2 e^{k_2 T} + \bar{L} = m$$

Эмхэтгэвэл

$$(\rho b k_1 + n) c_1 e^{k_1 T} + (\rho b k_2 + n) c_2 e^{k_2 T} = 0 \tag{5.13}$$

(5.10) нөхцлийг бичвэл

$$c_1 k_1 e^{k_1 T} + c_2 k_2 e^{k_2 T} = \sqrt{\frac{K}{b}}$$

(5.11) системийг бичвэл:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \bar{L} = L_0 \\ (\rho b k_1 + n) c_1 e^{k_1 T} + (\rho b k_2 + n) c_2 e^{k_2 T} = 0 \\ c_1 k_1 e^{k_1 T} + c_2 k_2 e^{k_2 T} = \sqrt{\dfrac{K}{b}} \end{cases}$$

Энэ системийг бодож оновчтой $c_1^*, \quad c_2^*$, T^*-г олбол
$L_T^* = L(T^*) = c_1^* e^{k_1 T^*} + c_2^* e^{k_2 T^*} + \bar{L}$ болно.

Бүлэг 6

График тооцооны ажил

1. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0$

2. $\int\limits_{-1}^1 (x'^2 + x^2) dt \to extr; \quad x(-1) = x(1) = 1$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4x \sin t + x^2 - x'^2) dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

4. $\int\limits_0^{T_0} (x'^2 - x) dt \to extr; \quad x(0) = x(T_0) = 0$

5. $\int\limits_0^1 (x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_1 x_2) dt \to extr; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$

   $x(1) = sh1, \quad x_2(1) = -sh1.$

6. $\int\limits_0^1 x'^2 + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to extr$

7. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad x(0) = 1$

8. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+x'^2}}{x} dt \to extr; \quad x(0) = 1$

9. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 x dt = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0$

10. $\int\limits_0^1 (x_1 + x_2) dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 x_1' x_2' dt = 0, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$

    $x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = -3$

11. $\int\limits_{-1}^0 x dt \to extr; \quad \int\limits_{-1}^0 \sqrt{1+x'^2} dt = \dfrac{\pi}{2}, \quad x(-1) = 0$

12. $\int\limits_{-1}^e (t+1) t x''^2 dt \to extr; \quad x(1) = 0, \quad x'(1) = 1,$

    $x(e) = e, \quad x'(e) = 2$

13. $\int\limits_0^1 (t+1)^3 x''^2 dt \to extr; \quad x(0) = 1, \quad x(1) = \dfrac{1}{2},$

    $x'(0) = 1, \quad x'(1) = -\dfrac{1}{4}$

14. $\int\limits_1^e t^3 x''^2 dt \to extr; \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -1,$

    $x(e) = \dfrac{1}{e}, \quad x'(e) = -\dfrac{1}{e^2}$

15. $\int\limits_0^1 (x''^2 + x'^2) dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x'(1) = sh1$

16. $\int\limits_0^1 u^2 dt \to extr; \quad x'' - x = u, \quad x(0) = 1$

17. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin t dt \to extr; \quad |x''| \le 1, \quad x(\pm\pi) = 0$

18. $\int\limits_{0}^{1} |x''| dt \to inf; \quad x'' \le 2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1, \quad x'(2) = 2$

19. $T \to inf;\ |x''| \le 2,\ x(-1)=1,\ x(T)=1,\ x'(-1)=x'(T) = 0$

20. $T \to inf;\ -1 \le x'' \le 2,\ x(0) + x'(T)=0,\ x'(0)=x(t) = 1$

21. $T \to inf;\ x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u,$

    $x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \quad u \in c0\{(1;-1), (-2;0), (0;1)\}$

22. $x_1^2(1) + x_2^2(1) \to inf; \quad x_1' = u_1, \quad x_2' = u_2,$

    $x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad u_1^2 + u_2^2 \le 1$

23. $\int\limits_{0}^{1} x'^2 dt \to extr; \qquad x(0) = 1, \quad x(1) = 0$

24. $\int\limits_{-1}^{1} (x'^2 + 4x^2) dt \to extr; \qquad x(-1) = 1, \quad x(1) = 1$

25. $\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} (x'^2 - x^2 - 4x \sin t) dt \to extr; \quad x(0) = x(\frac{3\pi}{2}) = 0$

26. $\int\limits_{0}^{1} (tx'^2 + 2x) dt \to extr; \quad x(1) = 0$

27. $\int\limits_{0}^{1} (x_1'^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2) dt \to extr; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$

    $x_1(1) = x_2(1) = sh1$

28. $\int\limits_{0}^{1} (x'^2 + x^2) dt \to extr;$

29. $\int\limits_{0}^{1} x'^2 dt + \alpha x^2(1) \to extr; \qquad x(0) = 0$

30. $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+x'^2}}{x} dt \to extr; \quad x(0)=1, \;\; T - x(T) = 1$

31. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 x dt = 3, \;\; x(0)=1, \;\; x(1)=6$

32. $\int\limits_0^1 t(x_1 - x_2) dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 x_1' x_2' dt = -\frac{4}{5},$
 $x_1(0) = x_2(0) = 0, \;\; x_1(1) = 2, \;\; x_2(1) = 0,$

33. $\int\limits_0^1 x_1' x_2' dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 x_1 dt = \int\limits_0^1 x_2 dt = 0,$
 $x_1(0) = x_2(0) = 0, \;\; x_1(1) = 1, \;\; x_2(1) = 2$

34. $\int\limits_0^1 (t+1)^2 x''^2 dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = 0,$
 $x(1) = 1, \;\; x'(1) = 2$

35. $\int\limits_0^1 x'''^2 dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,$
 $x(1) = 1, \;\; x'(1) = 4, \;\; x''(1) = 1$

36. $\int\limits_0^1 (x''^2 + 4x^2) dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = 0, \;\; x'(\pi) = sh\pi$

37. $\int\limits_0^1 (x''^2 + x'^2) dt \to extr; \quad x'(0) = sh\ 1, \;\; x(1) = x'(1) = 0$

38. $\int\limits_0^1 u^2 dt \to extr; \quad x'' - x = u, \;\; x(0) = 1, \;\; x'(0) = 0$

39. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} x \sin dt \to extr; \quad |x''| \le 1, \;\; x(0) = 0$

40. $T \to inf; \quad |x''| \le 2, \quad x(-1) = 1, \;\; x(T) = -1,$
 $x'(-1) = x'(T) = 0$

41. $\int\limits_0^2 |x''|dt \to inf;\ x'' \le 2,\quad x(0) = 1,\quad x'(0) = -2,\quad x(2) = 0$

42. $T \to inf;\quad -3 \le x'' \le 2,\quad x'(0) + x'(T) = 1,$
$x(0) = 1,\quad x(T) = 2$

43. $T \to inf;\ x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0,\quad x(T) = 0,\quad u \in co\{(1;1),(0;1),(-1;-1)\}$

44. $x_1(1) + x_2(1) \to inf;\quad x_1' = u_1,\quad x_2' = u_2,$
$u_1^2 + u_2^2 = 1;\quad x_1(0) = x_2(0) = 0$

45. $\int\limits_0^1 (x - x'^2)dt \to extr;\quad x(0) = 0,\quad x(T_0) = \xi$

46. $\int\limits_0^1 (x'^2 + x^2 + 2x)dt \to extr;\quad x(0) = x(1) = 0$

47. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2 + 4x\cos t)dt \to extr;\quad x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0$

48. $\int\limits_0^1 (x_1'x_2' + x_1x_2)dt \to extr;\quad x_1(0) = x_2(0) = 1,\quad x_1(1) = e,$
$x_2(1) = \dfrac{1}{e}$

49. $\int\limits_0^{T_0} (x'^2 + x^2)dt \to extr;\quad x(0) = 0,\quad x(T_0) = \xi$

50. $\int\limits_0^{\pi} (x'^2 + x^2 - 4x\sin t)dt \to extr;\quad x(0) = 0,\quad x(T_0) = \xi$

51. $\int\limits_0^T x'^2 dt \to extr;\quad x(0) = 0,\quad T + x(T) + 1 = 0$

52. $\int\limits_0^{T_0} x\sqrt{1 + x'^2}dt \to extr;\quad x(T_0) = \xi$

53. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 x dt = 1$

54. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 tx dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

55. $\int\limits_0^T x'^2 dt + x(T) \to extr; \quad x(0) = x_0$

56. $\int\limits_0^1 (t+1)x''^2 dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = 0,$
$x(1) = 1, \quad x'(1) = 2$

57. $\int\limits_0^1 x'''^2 dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
$x(1) = 1, \quad x'(1) = 4, \quad x''(1) = 12$

58. $\int\limits_0^\pi (x''^2 + 4x^2) dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x(\pi) = sh\ \pi$

59. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x''^2 - x^2) dt \to extr; \quad x(0) = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{2},$
$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

60. $\int\limits_0^1 u^2 dt \to extr; \quad x'' - x = u, \quad x(1) = sh\ 1,$
$x'(1) = ch\ 1 + sh\ 1, \quad x(0) = 0.$

61. $\int\limits_0^{T_0} |x'| dt \to inf; \quad x'' = A, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi$

62. $\int\limits_0^1 x''^2 dt \to extr; \quad x'' = 24, \quad x(0) = 11, \quad x(1) = x'(1) = 0$

63. $T \to inf; \quad |x''| \le 2, \quad x'(0) = x'(T) = 0,$
$x(0) = 1, \quad x(T) = 3$

64. $\int\limits_0^1 (x^2+u^2)dt \to inf; \quad x' = u, \quad x(0)=1, \quad |u| \le 1$

65. $T \to inf; \; x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} u,$

$x(0)=x_0, \quad x(T)=0, \quad u \in co\{(1;-1),(2;1),(0;3)\}$

66. $T \to inf; \; 0 \le x'' \le 2, \; x(0)+x'(T)=1, \; x'(0)=1, \; x(T)=0$

67. $\int\limits_0^{T_0} (x'^2 - x)dt \to extr; \quad x(0)=0, \quad x(T_0)=\xi$

68. $\int\limits_0^1 (x'^2+x^2+tx)dt \to extr; \quad x(0)=x(1)=0$

69. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2 + 4x\cos t)dt \to extr; \quad x(0)=0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

70. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2)dt \to extr; \quad x(0)=0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

71. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x_1'x_2' - x_1x_2)dt \to extr; \quad x_1(0)=x_2(0)=0,$

$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

72. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2)dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to extr$

73. $\int\limits_0^{T} x'^2 dt \to extr; \quad x(0)=0, \quad (T-1)x^2(T)+2=0$

74. $\int\limits_0^1 \left(\frac{x_1'^2 + x_2'^2}{2} - x_1x_2\right)dt \to extr; \quad x_1(1)=x_2(1)=1$

75. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 tx dt = 0, \quad x(0)=-4, \quad x(1)=4$

76. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 x dt = 1, \quad x(0) = 0$

77. $\int\limits_0^T x'^2 dt + x^2(0) \to extr; \quad x(T) = x_1$

78. $\int\limits_0^1 e^{-t} x''^2 dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x(1) = x'(1) = 0$

79. $\int\limits_0^1 (x'''^2 + x''^2) dt \to extr; \quad x(0) = x''(0) = 0,$
$x'(0) = 1, \quad x'(1) = ch1, \quad x(1) = x''(1) = sh1$

80. $\int\limits_0^\pi (x''^2 + 4x^2) dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x(\pi) = sh\ \pi$

81. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x''^2 - x'^2) dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

82. $\int\limits_0^1 u^2 dt \to extr; \quad x'' - x = u, \quad x(0) = x'(0) = 0,$
$x(1) = sh\ 1, \quad x'(1) = ch1 + sh1$

83. $\int\limits_0^4 (x'^2 + x) dt \to extr; \quad |x'| = 1, \quad x(4) = 0$

84. $\int\limits_0^2 x''^2 dt \to inf; \quad x'' \geq 6, \quad x(0) = x'(2) = 0, \quad x(2) = 17$

85. $T \to inf; \quad 0 \leq x'' \leq 1, \quad x(0) = \xi_1, \quad x'(0) = \xi_2,$
$x(T) = x'(T) = 0$

86. $T \to inf; \quad -1 \leq x'' \leq 2, \quad x(0) + x'(T) = \xi_1,$
$x(T) = 1, \quad x'(0) = \xi_2$

87. $T \to inf; \; x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \quad u \in co\{(0;0), (-1;1), (2;-2)\}$

88. $\int\limits_0^1 (u^2 + x_1^2)dt + x_1^2(1) + x_1^2(1) \to inf; \quad x_1' = u_1,$
$x_2' = u_2, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$

89. $\int\limits_0^1 (x'^2 + tx)dt \to extr; \quad x(0) = x(1) = 0$

90. $\int\limits_0^1 (4x \sin t - x^2 - x'^2)dt \to extr; \quad x(0) = x(1) = 0$

91. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (x^2 - 4x \cos t - x'^2)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \ x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}$

92. $\int\limits_{-1}^0 (12tx - x'^2)dt \to extr; \quad x(-1) = 1, \quad x(0) = 0$

93. $\int\limits_0^1 (x_1'x_2' + 6x_1 t + 12x_2 t^2)dt \to extr; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = x_2(1) = 1$

94. $\int\limits_0^{T_0} (x'^2_1 + x'^2_2)dt + x^2(T_0) \to extr$

95. $\int\limits_0^T x'^3 dt \to extr; \quad T + x(T) = 1, \quad x(0) = 0$

96. $\int\limits_0^1 \Big(\frac{x_1'^2 + x_2'^2}{2} - x_1 x_2)dt \to extr; \quad x_1(0) = x_2(0) = 1$

97. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 xdt = 1, \quad \int\limits_0^1 txdt = 0, \quad x(0) = x(1) = 0$

98. $\int\limits_0^1 x'^2 dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 xdt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0$

99. $\int\limits_0^T x'^2 dt + x^2(T) \to extr$

100. $\int\limits_0^1 e^{-t}x''^2 dt \to extr; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$

 $x(1) = 2e, \quad x'(1) = 2e$

101. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x'''^2 - x''^2) dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

 $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = x''(0) = x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

102. $\int\limits_0^{T_0} (x''^2 - x^2) dt \to extr$

103. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x''^2 - x'^2) dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

 $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

104. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to extr; \quad x'' + x = u, \quad x'(0) = 1$

105. $\int\limits_0^{T_0} (x'^2 + x) dt \to extr; \quad |x'| \leq 1, \quad x(0) = 0$

106. $\int\limits_0^1 x''^2 dt \to inf; \quad |x''| \leq 1, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x(1) = \frac{11}{24}$

107. $T \to inf; \; -3 \leq x'' \leq 1, \; x(0) = 3, \; x'(0) = x'(T) = 0,$

 $x(T) = -5$

108. $T \to inf; \; 0 \leq x'' \leq 1, \quad x(0) = \xi_1, \quad x(T) = \xi_2$

109. $T \to inf; \quad x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} u,$

 $x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \quad u \in co\{(-1;1), (0;1), (1;0)\}$

110. $\int\limits_0^1 u^2 dt + x(1) \to inf; \quad x' = u, \quad |u| = 1$

111. $\int\limits_0^1 (t^2x - x'^2)dt \to extr; \quad x(0) = x(1) = 0$

112. $\int\limits_0^1 (x'^2 + x^2 + 6xsh\ 2t)dt \to extr; \quad x(0) = x(1) = 0$

113. $\int\limits_0^{T_0} (x'^2 - x^2 + 4x\cos t)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi$

114. $\int\limits_{-1}^1 (x'^2 - 2tx)dt \to extr; \quad x(-1) = -1, \quad x(1) = \xi$

115. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x_1'^2 + x_3'^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3)dt \to extr; \quad x_1(0) = x_3(0) = 1$

$x_2(0) = -1, \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

116. $\int\limits_0^1 (x_1'x_2' + x_1x_2)dt + x_1(0)x_2(1) + x_2(0)x_1(1) \to extr$

117. $\int\limits_0^1 (x'^2 + x)dt \to extr; \quad x(1) = 0$

118. $\int\limits_0^{T_0} (x'^2 - x)dt \to extr; \quad x(0) = \xi$

119. $\int\limits_0^1 x'^2 \to extr; \quad \int\limits_0^1 xdt = -\frac{3}{2}; \quad \int\limits_0^1 txdt = -2,$

$x(0) = 2, \quad x(1) = -14$

120. $\int\limits_0^1 x'^2dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 txdt = 1, \quad x(1) = 0$

121. $\int\limits_0^T (\beta x^2 + x'^2)dt + \alpha x^2(T) \to extr$

122. $\int\limits_0^{T_0} (x''^2 + x'^2)dt \to extr; \ x(0) = x'(0) = x(T_0) = x'(T_0) = x'(T_0) = 0$

123. $\int\limits_0^\pi (x'''^2 - x''^2)dt \to extr; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x(\pi) = 0$
$x(\pi) = \pi, \quad x'(\pi) = 2$

124. $\int\limits_0^T (x''^2 - x^2)dt \to extr$

125. $\int\limits_0^1 x dt \to extr; \quad \int\limits_0^1 x''^2 dt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0$

126. $\int\limits_0^1 u^2 dt \to extr; \quad x'' + x = u, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

127. $\int\limits_0^{T_0} (x'^2 + x)dt \to extr; \quad |x'| \leq 1, \quad x(0) = 0$

128. $x(2) \to inf; \quad |x'| \leq 2, \quad \int\limits_0^1 x'^2 dt = 2, \quad x(0) = 0$

129. $T \to inf; \quad 0 \leq x'' \leq 1, \quad x(0) = \xi_1, \quad x'(0) = \xi_2,$
$x(T) = x'(T) = 0$

130. $T \to inf; \quad -1 \leq x'' \leq 2, \quad x(0) = \xi_1, \quad x'(0) + x(T) = \xi_2$